1.1 SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

- Una **ecuación lineal** es una ecuación polinómica de grado 1, con una o varias incógnitas.

- Dos ecuaciones son **equivalentes** cuando tienen la misma solución (o las mismas soluciones). Para obtener ecuaciones equivalentes se puede:
  – Sumar o restar la misma expresión a ambos lados de la igualdad
  – Multiplicar o dividir por la misma expresión a ambos lados de la igualdad

- Un **sistema de ecuaciones** consiste en varias ecuaciones dadas conjuntamente con el fin de determinar la solución o soluciones comunes a todas ellas.

- Dos sistemas de ecuaciones son **equivalentes** si tienen las mismas soluciones. No es necesario que sus ecuaciones sean equivalentes.

1.1.1 Transformaciones en un sistema de ecuaciones

- Las siguientes transformaciones generan sistemas equivalentes, es decir, mantienen las soluciones del sistema:
  – **Multiplicar** o **dividi**r los dos miembros de una ecuación por un número distinto de 0.

Ejemplo: $$\left.\begin{array}{r} 2x+3y-z=2 \\ x-4y+2z=4 \end{array}\right\} \xrightarrow{2^{a}\cdot(-2)} \left.\begin{array}{r} 2x+3y-z=2 \\ -2x+8y-4z=-8 \end{array}\right\}$$

  – **Añadir** una ecuación que sea **combinación lineal** de las demás, o **suprimir** una ecuación que sea combinación lineal de las demás.

Ejemplo: $$\left.\begin{array}{r} 2x+3y-z=2 \\ -2x+8y-4z=-8 \end{array}\right\} \xrightarrow[1^{a}+2^{a}]{\textit{Añadimos}} \left.\begin{array}{r} 2x+3y-z=2 \\ -2x+8y-4z=-8 \\ 11y-5z=-6 \end{array}\right\}$$

– **Sustituir** una ecuación por el resultado de sumarle otra multiplicada por un número.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} x-4y+2z=4 \\ 2x+3y-z=2 \end{array}\right\} \xrightarrow{2^a-2\cdot 1^a} \left.\begin{array}{r} x-4y+2z=4 \\ 11y-5z=-6 \end{array}\right\}$

1.1.2 Soluciones de los sistemas de ecuaciones

- Sistema de ecuaciones sin solución: **Sistema incompatible**

  Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} x+y=3 \\ x+y=8 \end{array}\right\}$ (Es imposible que las dos ecuaciones se cumplan a la vez)

- Sistema de ecuaciones con una solución única: **Sistema compatible determinado**

  Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} x+y=8 \\ x-y=4 \end{array}\right\}$ (La única solución es $x = 6$; $y = 2$)

- Sistema de ecuaciones con un infinitas soluciones: **Sistema compatible indeterminado**

  Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} x+y=4 \\ 2x+2y=8 \end{array}\right\}$ (*Las dos ecuaciones tienen las mismas soluciones. Podemos quedarnos solo con una*)

1.1.3 Interpretación geométrica de las soluciones

- **Sistema de ecuaciones lineales con dos incógnitas:**

  Cada una de las ecuaciones del sistema determina una recta.

  – Si el sistema es **compatible determinado**, todas las rectas pertenecientes al sistema se cortan en un único punto.

  – Si el sistema es **compatible indeterminado**, las rectas definidas en el sistema coinciden.

  – Si el sistema es **incompatible**, las rectas no se cortan en un único punto. O bien son paralelas o bien, si en el sistema hay más de dos ecuaciones, las rectas se cortan dos a dos en distintos puntos.

- **Sistema de ecuaciones lineales con tres incógnitas:**

  Cada una de las ecuaciones del sistema determina un plano.

  – Si el sistema es **compatible determinado**, todos los planos pertenecientes al sistema se cortan en un único punto.

  – Si el sistema es **compatible indeterminado**, los planos definidos en el sistema se cortan en una recta (infinitos puntos), o bien son planos coincidentes.

  – Si el sistema es **incompatible**, los planos no se cortan en un único punto. O bien son paralelos o bien se cortan en rectas distintas formando un prisma o bien, si en el sistema hay más de tres ecuaciones, los planos se cortan tres a tres en distintos puntos.

1.1.4 Sistemas lineales homogéneos.

Un sistema lineal es homogéneo cuando todos los términos independientes son nulos. Estos sistemas siempre tienen la solución $x=0;\ y=0;\ \ldots$, por lo que siempre son compatibles. Si no tienen más soluciones son compatibles determinados, y si tienen más, compatibles indeterminados.

Ejemplo: $$\left.\begin{array}{r} 2x+y-z=0 \\ x+3y+2z=0 \\ 3x-2y+5z=0 \end{array}\right\}$$