1.2 MÉTODO DE GAUSS

1.2.1 Sistemas escalonados

Un sistema escalonado es aquél en que hay ecuaciones con una incógnita, con dos, con tres, y así hasta una ecuación que tenga el mismo número de incógnitas que el sistema. Estos sistemas son muy fáciles de resolver hallando el valor de la incógnita que está sola en una ecuación, sustituyéndolo en la ecuación en que hay dos, y así sucesivamente hasta resolver el sistema.

Ejemplo: $\left.\begin{aligned} x+2y-z+2t&=4\\ y-2z-t&=0\\ 3z+2t&=7\\ 4t&=8 \end{aligned}\right\}$ (Despejamos *t* en la 4ª, sustituimos en la 3ª y hallamos *z*, etc.)

1.2.2 Transformación de un sistema en un sistema escalonado

Haciendo cambios que nos generen sistemas de ecuaciones equivalentes (ver punto 1.1.1), vamos eliminando incógnitas paso a paso, hasta llegar a tener un sistema escalonado.

Ejemplo: $\left.\begin{aligned} x+3y-2z&=5\\ 2x-y+2z&=2\\ -x-2y+4z&=-1 \end{aligned}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{2^a-2\cdot 1^a} \\ \xrightarrow{3^a+1^a} \end{array} \left.\begin{aligned} x+3y-2z&=5\\ -7y+6z&=-8\\ y+2z&=4 \end{aligned}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{3^a} \\ \xrightarrow{2^a+7\cdot 3^a} \end{array} \left.\begin{aligned} x+3y-2z&=5\\ y+2z&=4\\ 20z&=20 \end{aligned}\right\}$

Vemos que en el primer paso hemos quitado la *x* de la 2ª y de la 3ª ecuación, sustituyendo éstas por ecuaciones equivalentes. En el segundo paso hemos quitado la *y* de la 3ª ecuación.

Cosas que debes saber acerca de estos cambios:

- No son únicos. Hay más formas de eliminar una incógnita. Si te fijas en el ejemplo anterior, para eliminar la *x* de la 2ª ecuación en el primer paso, hemos hecho (2ª – 2·1ª) pero podíamos haberla quitado también haciendo (2ª + 2·3ª). Los sistemas que vamos teniendo son distintos, pero la solución final es la misma.

- Una vez que hemos eliminado una incógnita de todas las ecuaciones excepto de una, esa ecuación ya no podemos utilizarla para eliminar otras incógnitas. En el ejemplo anterior, en el segundo paso ya no podemos utilizar la 1ª ecuación porque, aunque podríamos eliminar la *y* (haciendo, por ejemplo, 3·3ª – 1ª), volveríamos a tener la *x*.

$$\left.\begin{array}{r} x+3y-2z=5 \\ 2x-y+2z=2 \\ -x-2y+4z=-1 \end{array}\right\} \begin{array}{c} \xrightarrow{2^a-2\cdot 1^a} \\ \xrightarrow{3^a+1^a} \end{array} \left.\begin{array}{r} x+3y-2z=5 \\ -7y+6z=-8 \\ y+2z=4 \end{array}\right\} \xrightarrow{3\cdot 3^a-1^a} \left.\begin{array}{r} x+3y-2z=5 \\ -7y+6z=-8 \\ -x\qquad +8z=7 \end{array}\right\}$$

El cambio está bien, pero no llegamos a un sistema escalonado, que es nuestro objetivo.

1.2.3 Método de Gauss Simplificado

Todos los sistemas lineales se pueden expresar como sistemas escalonados mediante las transformaciones que hemos visto. En esto precisamente consiste el método de Gauss, que es el que hemos visto en el apartado anterior. Sin embargo, el proceso es más cómodo si, en lugar de las ecuaciones, trabajamos sólo con los coeficientes de éstas y sus términos independientes estructurados en matrices. Cada fila corresponde a una ecuación y cada columna a una incógnita o a los términos independientes.

Ejemplo: $\left.\begin{array}{r} x+3y-2z=5 \\ 2x-y+2z=2 \\ -x-2y+4z=-1 \end{array}\right\} \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right)$

Una vez escrito así, los cambios son los mismos que antes, para conseguir ceros:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 2 & -1 & 2 & 2 \\ -1 & -2 & 4 & -1 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{2^a-2\cdot 1^a} \\ \xrightarrow{3^a+1^a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & -7 & 6 & -8 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{3^a} \\ \xrightarrow{2^a+7\cdot 3^a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 20 & 20 \end{array}\right)$$

En ese caso, la última línea correspondería a la ecuación $20z=20$ (de donde $z=1$), la anterior a $y+2z=4$ (como $z=1$, obtenemos que $y=2$), etc.

Al hacer ceros para conseguir un sistema escalonado, podemos encontrarnos con las siguientes situaciones:

– Una fila de ceros: corresponde a una ecuación trivial. Podemos prescindir de ella.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & -4 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & -2 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{1^a-2\cdot 2^a} \\ \xrightarrow{1^a-2\cdot 3^a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & -4 \\ 0 & -2 & 8 & -8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & -4 \\ 0 & -2 & 8 & -8 \end{array}\right)$$

– Dos filas iguales o proporcionales: corresponden a ecuaciones equivalentes. Podemos prescindir de una de ellas.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \\ 3 & 8 & -4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{2\cdot 1^a-2^a} \\ \xrightarrow{3\cdot 1^a-3^a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right) \xrightarrow{2^a=3^a} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \end{array}\right)$$

– Una fila de ceros salvo el último número (término independiente) que es distinto. Es una ecuación sin solución, así que el sistema es incompatible.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 2 & 5 & -3 & 2 \\ 1 & 3 & -1 & 5 \end{array}\right) \begin{array}{c} \xrightarrow{2\cdot 1^a-2^a} \\ \xrightarrow{1^a-3^a} \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & -7 \end{array}\right) \longrightarrow \textit{SISTEMA INCOMPATIBLE}$$

Al quitar ecuaciones, puede darse el caso de que nos queden menos ecuaciones que incógnitas. Es lo que nos ocurre en los dos primeros ejemplos anteriores. En esos casos el sistema es Compatible Indeterminado, es decir, tiene infinitas soluciones. Para resolverlo, dejamos una incógnita como un parámetro. Para designar a este parámetro normalmente se utiliza la letra griega λ (lambda). Si hacen falta dos parámetros, λ y μ (mu).

Ejemplo:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 4 & 6 & -4 \\ 0 & -2 & 8 & -8 \end{array}\right) \longrightarrow \left.\begin{array}{r} 2x+4y+6z=-4 \\ -2y+8z=-8 \end{array}\right\}$$ Dejamos z como parámetro $z=\lambda$ y despejamos las demás en función de ese parámetro: $-2y=-8\lambda-8 \longrightarrow y=4\lambda+4$

$$2x+4(4\lambda+4)+6\lambda=-4 \longrightarrow 2x+16\lambda+16+6\lambda=-4 \longrightarrow x=-11\lambda-10$$

Solución General: $$\begin{array}{l} x=-11\lambda-10; \\ y=4\lambda+4; \\ z=\lambda \end{array}$$

Obtenemos soluciones particulares dando al parámetro λ diferentes valores. Por ejemplo, en el caso anterior,

- para $\lambda = 0$, la solución es $x = -10;\ y = 4;\ z = 0$,
- para $\lambda = 1$, la solución es $x = -21;\ y = 8;\ z = 1$,
- etc.