2.2 OPERACIONES CON MATRICES

2.2.1 Suma de matrices

Para poder sumar dos matrices, éstas deben tener la misma dimensión. Entonces se suman término a término: $(a_{ij})_{m,n} + (b_{ij})_{m,n} = (a_{ij} + b_{ij})_{m,n}$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & -5 \end{pmatrix}$

Propiedades de la suma de matrices:

- Asociativa: $(A+B)+C = A+(B+C)$
- Conmutativa: $A+B = B+A$
- Elemento neutro: La matriz nula es aquella cuyos elementos son todos **cero**.

  Ejemplo: $\mathbf{0}_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

- Matriz opuesta $(-A)$: $-A = (-a_{ij})$ (Se cumple que $A+(-A)=\mathbf{0}$)

  Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 4 \end{pmatrix}$ $-A = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$

2.2.2 Resta de matrices

Para poder restar dos matrices, éstas deben tener la misma dimensión. Entonces se restan término a término: $(a_{ij})_{m,n} - (b_{ij})_{m,n} = (a_{ij} - b_{ij})_{m,n}$. (Equivale a sumar *A* con la matriz opuesta de *B*).

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & -1 & 4 \\ 0 & 3 & -2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 & 3 & -4 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -4 & 8 \\ -4 & 5 & 1 \end{pmatrix}$

2.2.3 Producto de un número por una matriz

Se multiplica el número por cada uno de los elementos de la matriz: $k \cdot (a_{ij})_{m,n} = (k \cdot a_{ij})_{m,n}$

Ejemplo: $$3\cdot\begin{pmatrix}2 & -4\\ 0 & 3\\ -4 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}6 & -12\\ 0 & 9\\ -12 & 3\end{pmatrix}$$

Propiedades del producto de números por matrices: a, b $\in\Re$ y A, B $\in M_{m,n}$.

- Asociativa: $a\cdot(b\cdot A)=(a\cdot b)\cdot A$
- Distributiva en $\Re$: $(a+b)\cdot A=a\cdot A+b\cdot A$
- Distributiva en $M_{m,n}$: $a\cdot(A+B)=a\cdot A+a\cdot B$
- Elemento neutro: $1\cdot A=A$

2.2.4 Producto de matrices

Para poder multiplicar dos matrices, el número de **columnas de la primera** debe coincidir con el número de **filas de la segunda**.

Producto de una matriz fila por una matriz columna

El producto de una matriz fila por una matriz columna es un número que se obtiene multiplicando elemento a elemento y sumando los resultados.

Ejemplo: $$\begin{pmatrix}3 & 1 & -2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\ -3\\ 4\end{pmatrix}=3\cdot2+1\cdot(-3)+(-2)\cdot4=6-3-8=-5$$

Producto de dos matrices

El producto de una matriz $A_{m,p}$ por otra matriz $B_{p,n}$ (fíjate que el número de columnas de la primera es igual al número de filas de la segunda, *p*) es una matriz $C_{m,n}$ en la que el cada elemento c_{ij} se obtiene de multiplicar la fila *i*-ésima de *A* por la columna *j*-ésima de *B*.

$$c_{ij}=\begin{pmatrix}a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in}\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}b_{1j}\\ b_{2j}\\ \vdots\\ b_{nj}\end{pmatrix}=a_{i1}\cdot b_{1j}+a_{i2}\cdot b_{2j}+\ldots+a_{in}\cdot b_{nj}=\sum_{k=1}^{n}a_{ik}\cdot b_{kj}$$

Ejemplo: El producto $A_{2,3} \cdot B_{3,5}$ es una matriz de dimensión 2×5.

Por ejemplo, el elemento $c_{1,4}$ de esta matriz se obtiene multiplicando la primera fila de *A* por la cuarta columna de *B*. (2·1 + 1·2 + 3·1 = 7). De igual forma para los demás elementos.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 5 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 5 & 2 & 3 \\ 1 & 4 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 24 & 11 & 7 & 13 \\ 1 & 10 & 15 & 7 & 11 \end{pmatrix}$$

$$2 \times 3 \qquad 3 \times 5 \qquad 2 \times 5 \longleftarrow \text{Dimensiones}$$

Propiedades del producto de matrices:

- Asociativa (Siempre que, por sus dimensiones, sean multiplicables):

$$\left(A_{m,n} \cdot B_{n,p}\right) \cdot C_{p,q} = A_{m,n} \cdot \left(B_{n,p} \cdot C_{p,q}\right)$$

- No conmutativa: El producto de matrices, en general, no es conmutativo $A \cdot B \neq B \cdot A$

Ejemplo: $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ -8 & -14 \end{pmatrix}$; $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -3 \\ 9 & -15 \end{pmatrix}$

Por eso hablaremos de multiplicación **por la izquierda** o **por la derecha**.

- Elemento neutro: $A \cdot I = I \cdot A = A$ (donde *I* es la matriz identidad correspondiente)

- Distributiva respecto de la suma: (Siempre que sus dimensiones lo permitan)

$$A \cdot (B + C) = A \cdot B + A \cdot C \qquad (B + C) \cdot D = B \cdot D + C \cdot D$$

Otras propiedades del producto de matrices:

- Si $A \cdot B = A \cdot C$, no significa necesariamente que $B = C$

Por ejemplo, si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $C = \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}$ vemos que

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 10 \\ 34 & 20 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A \cdot C = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 7 \\ 5 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 17 & 10 \\ 34 & 20 \end{pmatrix}$$

$A \cdot B$ y $A \cdot C$ dan lo mismo, pero *B* y *C* eran diferentes.

- Si $A \cdot B = 0$, no significa necesariamente que A ó B sean 0.

Por ejemplo, $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$. Ninguna de las dos es la matriz nula, pero:

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 9 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

2.2.5 Trasposición de matrices

Trasponer una matriz significa cambiar las filas por las columnas. Si una matriz es de dimensión $m \times n$, su traspuesta es de dimensión $n \times m$. La matriz traspuesta se representa A^T y se lee traspuesta de *A*.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} \longrightarrow A^T = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$

Propiedades de la trasposición de matrices:

- Si trasponemos dos veces, obtenemos la matriz original: $\left(A^T\right)^T = A$
- La traspuesta de la suma es la suma de las traspuestas: $(A+B)^T = A^T + B^T$
- La traspuesta del producto es el producto de las traspuestas, cambiando el orden:

$$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$$

Matriz Simétrica

Es una matriz cuadrada en la que los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son iguales. $a_{ij} = a_{ji} \quad \forall i, j$. Una matriz simétrica coincide con su traspuesta: $A^T = A$.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & 7 & 4 \\ -1 & 4 & -6 \end{pmatrix}$ Vemos que A^T es ella misma.

Matriz Antisimétrica o Matriz Hemisimétrica

Es una matriz cuadrada en la que los elementos simétricos respecto de la diagonal principal son opuestos. $a_{ij} = -a_{ji} \quad \forall i, j$. La matriz traspuesta de una matriz hemisimétrica es igual a la opuesta $A^T = -A$. Los elementos de la diagonal principal son todos cero.

Ejemplo: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & -4 \\ 1 & 4 & 0 \end{pmatrix}$

2.2.6 Potencia de matrices

Para poder calcular la potencia de una matriz, esta tiene que ser cuadrada. Se trata de multiplicar la matriz por si misma tantas veces como diga el exponente.

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}$

$$A^3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -12 \\ 12 & 21 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -27 & -54 \\ 54 & 81 \end{pmatrix}$$

Potencias *n*-ésimas

A veces, al ir hallando A^2, A^3, A^4..., podemos deducir el valor de A^n, lo que nos permite calcular cualquier potencia de esa matriz.

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ vemos que:

$$A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^4 = A^3 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Se puede deducir que $A^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}$

Si queremos demostrar que es cierto, tenemos que usar la **demostración por inducción**:

1. Comprobarlo para el caso más pequeño.
2. Suponerlo cierto para el caso $n-1$
3. Probarlo para el caso *n*.

En el caso anterior, los tres pasos del metodo de inducción serían:

1. Comprobamos que $A^2=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ $\quad A^2=A\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{pmatrix}$ ✔

2. Suponemos que $A^{n-1}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n-1 & 1\end{pmatrix}$

3. Probamos el caso A^n: $A^n=A^{n-1}\cdot A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n-1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ n & 1\end{pmatrix}$

DEMOSTRADO