## 2.3 *MATRIZ INVERSA*

Se llama matriz inversa de una matriz $A$ a aquella matriz $A^{-1}$ que cumple:

$$A\cdot A^{-1} = A^{-1}\cdot A = \boldsymbol{I}$$

Vemos que, para que eso pueda cumplirse, la matriz $A$ tiene que ser cuadrada. Ahora bien, no todas las matrices cuadradas tienen inversa. Si la tienen, se llaman **regulares**, y si no la tienen, **singulares**.

### 2.3.1 Cálculo de la matriz inversa. Método de Gauss-Jordan

Si de una matriz, sometida a determinadas transformaciones, se obtiene la matriz unidad, entonces de la matriz unidad, sometida a las mismas transformaciones, se obtiene la matriz inversa de la primera. Por lo tanto, para hallar $A^{-1}$, escribimos una matriz con dos partes: a la izquierda la matriz $A$ y a la derecha la matriz identidad del orden correspondiente $\left(A \mid \boldsymbol{I}\right)$. Después hacemos los cambios necesarios para transformar la parte izquierda en la matriz identidad y la matriz resultante a la parte derecha es la matriz inversa.

Si a lo largo del proceso alguna fila de $A$ se anula, la matriz es singular, es decir, no tiene inversa.

*Ejemplo 1*: Para hallar la inversa de $A=\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}$ escribimos $\left(\begin{array}{cc|cc}2 & -3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$ y hacemos los cambios para transformar $A$ en $\boldsymbol{I}$:

$$\left(\begin{array}{cc|cc}2 & -3 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{array}\right) \xrightarrow[2\cdot 2^{a}-1^{a}]{2^{a}} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 1 & 0 & 1\\ 0 & 5 & -1 & 2\end{array}\right) \xrightarrow[2^{a}]{1^{a}\cdot 5-2^{a}} \left(\begin{array}{cc|cc}5 & 0 & 1 & 3\\ 0 & 5 & -1 & 2\end{array}\right) \xrightarrow[2^{a}/5]{1^{a}/5} \left(\begin{array}{cc|cc}1 & 0 & 1/5 & 3/5\\ 0 & 1 & -1/5 & 2/5\end{array}\right)$$

Por lo tanto, la matriz $\begin{pmatrix}1/5 & 3/5\\ -1/5 & 2/5\end{pmatrix}$ es la matriz inversa de $A$.

Vemos que: $\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1/5 & 3/5\\ -1/5 & 2/5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

Y que: $\begin{pmatrix}1/5 & 3/5\\ -1/5 & 2/5\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2 & -3\\ 1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$

*Ejemplo 2*: Hallar la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\1&2&1&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\xrightarrow{1^a}\\ \xrightarrow{2^a}\\ \xrightarrow{3^a-1^a}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&2&0&1&0\\0&1&0&-1&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\xrightarrow{1^a-2^a}\\ \xrightarrow{3^a}\\ \xrightarrow{2^a-3^a}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&-1&1&-1&0\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&2&1&1&-1\end{array}\right)$$

$$\begin{array}{c}\xrightarrow{1^a\cdot 2+3^a}\\ \xrightarrow{2^a}\\ \xrightarrow{3^a}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}2&0&0&3&-1&-1\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&2&1&1&-1\end{array}\right)\begin{array}{c}\xrightarrow{1^a/2}\\ \xrightarrow{2^a}\\ \xrightarrow{3^a/2}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&3/2&-1/2&-1/2\\0&1&0&-1&0&1\\0&0&1&1/2&1/2&-1/2\end{array}\right)$$

Por lo tanto, la matriz inversa es: $A^{-1}=\begin{pmatrix}3/2&-1/2&-1/2\\-1&0&1\\1/2&1/2&-1/2\end{pmatrix}$, o bien $\dfrac{1}{2}\begin{pmatrix}3&-1&-1\\-2&0&2\\1&1&-1\end{pmatrix}$

Podemos comprobar que: $\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3/2&-1/2&-1/2\\-1&0&1\\1/2&1/2&-1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

Y que también: $\begin{pmatrix}3/2&-1/2&-1/2\\-1&0&1\\1/2&1/2&-1/2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\1&2&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$

*Ejemplo 3*: Halla la matriz inversa de $A=\begin{pmatrix}1&3&0\\2&1&-2\\5&5&-4\end{pmatrix}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\2&1&-2&0&1&0\\5&5&-4&0&0&1\end{array}\right)\begin{array}{c}\xrightarrow{1^a}\\ \xrightarrow{1^a\cdot 2-2^a}\\ \xrightarrow{1^a\cdot 5-3^a}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\0&5&2&2&-1&0\\0&10&4&5&0&-1\end{array}\right)\begin{array}{c}\xrightarrow{1^a}\\ \xrightarrow{2^a}\\ \xrightarrow{3^a-2^a\cdot 2}\end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&3&0&1&0&0\\0&5&2&2&-1&0\\0&0&0&1&2&-1\end{array}\right)$$

Se anula una fila de *A*. Por lo tanto, la matriz *A* no tiene inversa, es una matriz **singular**.