2.4 RANGO DE UNA MATRIZ

Una colección de *n* números reales dados de forma ordenada se llama n-upla.

- **Combinación lineal** de varias n-uplas es el resultado de multiplicar cada una de ellas por un número y sumarlas.
- Varias n-uplas son **linealmente dependientes** si alguna de ellas se puede poner como combinación lineal de las demás.
- Varias n-uplas son **linealmente independientes** si ninguna de ellas se puede poner como combinación lineal de las demás.

Teorema: En una matriz, el número de filas Linealmente Independientes coincide con el número de columnas Linealmente Independientes.

El rango de una matriz, $R(A)$, es el número de líneas (filas o columnas) linealmente independientes.

Por ejemplo, el rango de $A=\begin{pmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 6 & 2 \end{pmatrix}$ es 1, porque la segunda fila es igual al doble de la primera. Solo tiene una fila linealmente independiente.

El rango de $B=\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$ es 2, porque las filas no son proporcionales (ni las columnas)

El rango de $C=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & 2 & 6 \\ -1 & -1 & -3 \end{pmatrix}$ es 1, porque solo una línea (fila o columna) es linealmente independiente. Las otras dos son combinación lineal de ella.

2.4.1 Propiedades del rango de una matriz

- Como el rango es el número de filas o de columnas linealmente independientes, no puede ser mayor que el menor del número de fila o de columnas de la matriz. Por ejemplo, en una matriz de dimensión 2×15, aunque tenga 15 columnas, el rango como máximo es 2, porque solo tiene 2 filas.

- Si una matriz tiene una línea de ceros, se puede suprimir y el rango no varía. (Una línea de ceros es aquella en la que todos los elementos son cero. Con que haya uno solo que no sea cero, ya no es una línea de ceros)

- Si una matriz tiene una línea igual o proporcional a otra paralela, se puede suprimir sin que cambie el rango.

- Si una matriz tiene una línea que es combinación lineal de otras paralelas, podemos suprimirla y el rango no varía.

- Si en una matriz intercambiamos dos líneas paralelas, el rango no cambia.

- Si multiplicamos (o dividimos) todos los elementos de una línea por un número distinto de cero, el rango no varía.

- Si sustituimos una línea por la combinación lineal de ella misma y otras paralelas, el rango no cambia.

Estas propiedades nos permiten calcular el rango de una matriz por el método de Gauss.

2.4.2 Cálculo del rango de una matriz. Método de Gauss.

Se trata de utilizar las propiedades anteriores para transformar la matriz dada en una matriz escalonada equivalente. El rango de la matriz será el número de líneas distintas de cero que nos queden.

Ejemplo: Calcular el rango de $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & -8 & -5 \end{pmatrix}$

$$R\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 5 \\ 3 & 5 & -8 & -5 \end{pmatrix} \begin{array}{l} \xrightarrow{2^{a}} \\ \xrightarrow{2\cdot 2^{a}-1^{a}} \\ \xrightarrow{3\cdot 2^{a}-3^{a}} \end{array} = R\begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 & 5 \\ 0 & -7 & 7 & 10 \\ \cancel{0} & \cancel{-14} & \cancel{14} & \cancel{20} \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{R(A)=2}$$

El rango es 2 porque solo hay dos líneas linealmente independientes. La tercera fila es igual al doble de la segunda, por lo que podemos quitarla.

Ejemplo: Calcular el rango de $A=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

$$R\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 2 & 3 & -1 \\ -2 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{1^a} \\ \xrightarrow{2\cdot 1^a - 2^a} \\ \xrightarrow{2\cdot 1^a + 3^a} \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -7 & 11 \\ 0 & -1 & 10 \end{pmatrix} \begin{matrix} \xrightarrow{1^a} \\ \xrightarrow{2^a} \\ \xrightarrow{-7\cdot 3^a + 2^a} \end{matrix} = R\begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ 0 & -7 & 11 \\ 0 & 0 & -59 \end{pmatrix} \longrightarrow \boxed{R(A)=3}$$

El rango es 3 porque al hacer la matriz escalonada equivalente, hay tres líneas que no son de ceros.