2.5 ECUACIONES CON MATRICES

2.5.1 Ecuaciones matriciales

Una ecuación matricial es aquella en la que intervienen matrices. Por ejemplo:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x & y \\ z & t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$, que podemos escribir $A \cdot X + B = C$

Resolverla significa, como siempre, despejar las incógnitas. Se puede operar con las matrices hasta llegar a ecuaciones lineales, pero este método, con matrices grandes es muy largo. En el ejemplo anterior, multiplicamos $A \cdot X$ primero y sumamos B después:

$$\begin{pmatrix} 2x+z & 2y+t \\ x-3z & y-3t \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2x+z+3 & 2y+t+5 \\ x-3z-1 & y-3t+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

Igualando elemento a elemento, nos queda un sistema de cuatro ecuaciones con cuatro incógnitas, que podemos separar en dos sistemas de dos ecuaciones con dos incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} 2x+z+3=5 \\ 2y+t+5=-2 \\ x-3z-1=3 \\ y-3t+2=1 \end{array}\right\} \longrightarrow \begin{array}{l} \left.\begin{array}{l} 2x+z+3=5 \\ x-3z-1=3 \end{array}\right\} \\ \left.\begin{array}{l} 2y+t+5=-2 \\ y-3t+2=1 \end{array}\right\} \end{array}$$

de los cuales podemos obtener las incógnitas.

Otra forma de resolver la ecuación es operando directamente con las matrices:

$$A \cdot X + B = C \longrightarrow A \cdot X = C - B \longrightarrow A^{-1} \cdot A \cdot X = A^{-1} \cdot (C - B) \longrightarrow \boxed{X = A^{-1} \cdot (C - B)}$$

donde A^{-1} es la matriz inversa de A.

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[1^a - 2\cdot 2^a]{2^a} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow[2^a]{7\cdot 1^a + 3\cdot 2^a} \left(\begin{array}{cc|cc} 7 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 7 & 1 & -2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[2^a/7]{1^a/7} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 3/7 & 1/7 \\ 0 & 1 & 1/7 & -2/7 \end{array}\right) \longrightarrow A^{-1} = \frac{1}{7} \cdot \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$$

NOTA: Como el producto de matrices no es conmutativo, no existe la división de matrices, por lo que para despejar una matriz que esté multiplicando, tenemos que multiplicar por la inversa en los dos miembros de la ecuación, teniendo en cuenta que la multiplicación por la derecha y por la izquierda son distintas:

- Si tenemos $A\cdot X = B$ y A tiene inversa (no todas las matrices la tienen), para despejar X tenemos que multiplicar por A^{-1} por la izquierda:

  $A^{-1}\cdot A\cdot X = A^{-1}\cdot B \longrightarrow X = A^{-1}\cdot B$, ya que $A^{-1}\cdot A = I$ y $I\cdot X = X$

- En cambio, si tenemos $X\cdot A = B$, tendremos que multiplicar por la derecha:

  $X\cdot A\cdot A^{-1} = B\cdot A^{-1} \longrightarrow X = B\cdot A^{-1}$

Las soluciones, en los dos casos, son distintas.

2.5.2 Sistemas lineales mediante matrices

Un sistema lineal de n ecuaciones con p incógnitas:

$$\left.\begin{array}{l} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \cdots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \cdots + a_{2p}x_p = b_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 + \cdots + a_{3p}x_p = b_3 \\ \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \quad \dots\dots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + a_{n3}x_3 + \cdots + a_{np}x_p = b_n \end{array}\right\} \text{ se puede escribir de la siguiente forma:}$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} = A\cdot X = B$$

$$n\times p \qquad\qquad p\times 1 \qquad n\times 1 \qquad \longleftarrow \textit{Dimensiones}$$

donde:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \cdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \\ \cdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1p} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2p} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3p} & b_3 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{np} & b_n \end{array}\right)$$

Matriz de los coeficientes — Incógnitas — Términos independientes — Matriz ampliada

Ejemplo: Del sistema $\left.\begin{array}{r} 3y - z = 4 \\ 2x + y + 2z = -1 \end{array}\right\}$ tenemos:

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad X = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad A^* = \left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & -1 & 4 \\ 2 & 1 & 2 & -1 \end{array}\right)$$

y podemos escribirlo como $A \cdot X = B$.