3.3 PROGRAMACIÓN LINEAL

La programación lineal sirve para hallar el máximo o el mínimo de una cierta expresión lineal, llamada **función objetivo**, sometida a una serie de restricciones expresadas como inecuaciones lineales.

Se usa, por ejemplo, para hallar ganancias máximas o coste mínimo cuando los recursos son limitados o se necesita cubrir ciertas necesidades.

Ejemplo: Problema de la dieta.

Un veterinario recomienda una dieta diaria para un gato en la que aparezcan al menos 8 unidades de hidratos de carbono y 7 de proteínas, durante dos meses. Tenemos dos tipos de galletas, A y B, cuyos contenidos son: el producto A tiene 1 unidad de hidratos de carbono y 2 de proteínas por galleta; el producto B tiene 2 unidades de hidratos de carbono y 1 de proteínas por galleta. La caja de 20 galletas A cuesta 10 € y la de 20 galletas B, 7 €.

Se trata de averiguar cuantas cajas comprar de cada producto para que el coste sea mínimo (función objetivo), pero cumpliendo con los requisitos que pone el veterinario (restricciones).

Para resolver este tipo de problemas, primero tenemos que resolver el sistema de inecuaciones que obtenemos de las restricciones del problema, tal como vimos en el punto 3.2. Una vez encontrada la región del plano que cumple con todas las restricciones, tenemos que buscar el punto en el que la función objetivo alcanza el máximo o el mínimo.

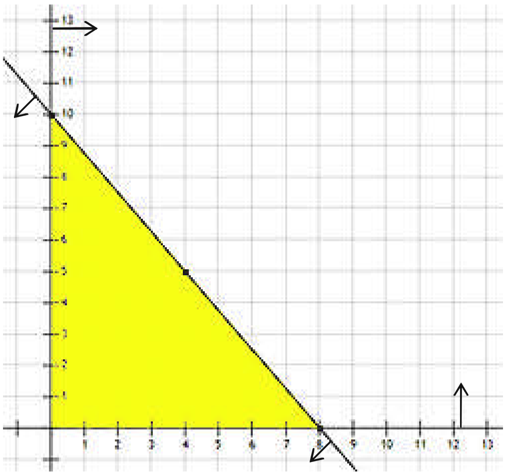
3.3.1 Región factible acotada

<u>TEOREMA</u>: Si una función lineal tiene un máximo o un mínimo en una región acotada, lo tiene en un vértice o en un lado de esa región.

Por lo tanto, se trata de determinar los vértices de la región solución y hallar los valores que toma en cada uno de ellos para hallar el máximo o el mínimo de la función objetivo. Si ese valor se alcanza en un solo vértice, ese es la solución del problema. Si el valor máximo o mínimo se alcanza en dos vértices, la solución serán todos los puntos del lado que une esos dos vértices.

Ejemplo: Buscar el máximo de la función $f(x,y)=3x-2y$ sujeta a las siguientes restricciones: $x\geq 0$ $y\geq 0$ $5x+4y\leq 40$

La región del plano es la calculada en el ejemplo del apartado 3.2:



Para calcular el máximo de $f(x,y)=3x-2y$ hallamos el valor que toma en los vértices:

$$f(0,0)=3\cdot 0-2\cdot 0=0$$

$$f(0,10)=3\cdot 0-2\cdot 10=-20$$

$$f(8,0)=3\cdot 8-2\cdot 0=24$$

Vemos que el valor máximo se alcanza en el punto (8, 0), por lo tanto, la solución del problema es $x=8$, $y=0$

Ejemplo:

Una empresa dispone de:

- 200 ordenadores de la marca PC Plus
- 150 ordenadores de la marca Computing,
- 150 impresoras PC Plus
- 150 impresoras Computing.
- 250 equipos multimedia.

Para ponerlas a la venta, ofrece dos posibilidades:

- Equipo multimedia con ordenador e impresora marca PC Plus
- Equipo multimedia con ordenador e impresora Computing

Con una venta del primer lote obtendría una ganancia de 200€, mientras que por una del segundo la ganancia es de 150€. ¿Cuántos lotes de cada tipo convendrá preparar para obtener una ganancia máxima?

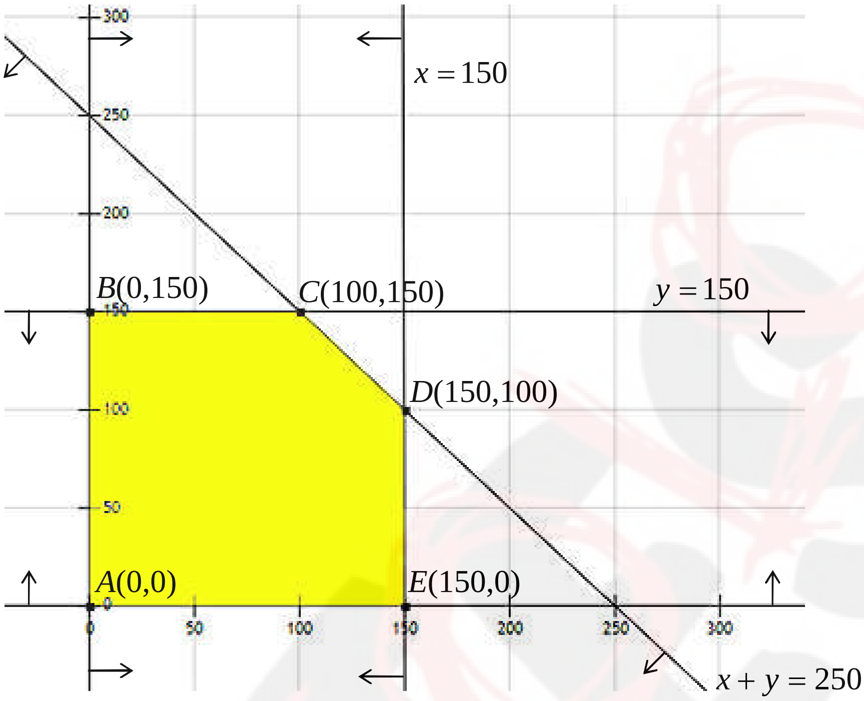
Llamamos: $x=$ *Número de lotes de la marca PC Plus*

$y=$ *Número de lotes de la marca Computing*

Las restricciones que tenemos que cumplir son las siguientes:

$$\begin{cases} x\leq 150 & (\textit{Aunque hay } 200 \textit{ ordenadores, sólo tenemos } 150 \textit{ impresoras PC Plus}) \\ y\leq 150 & (\textit{Sólo tenemos } 150 \textit{ ordenadores e impresoras Computing}) \\ x+y\leq 250 & (\textit{Limitación por el número de equipos multimedia en total}) \\ x\geq 0 & \\ y\geq 0 & (\textit{No se puede hacer un número negativo de lotes}) \end{cases}$$

La región de las soluciones es la siguiente:



Los beneficios en los vértices son:

$$B(x,y)=200x+150y \longrightarrow \begin{cases} B(A)=200\cdot 0+150\cdot 0=0 \\ B(B)=200\cdot 0+150\cdot 150=22500 \\ B(C)=200\cdot 100+150\cdot 150=42500 \\ B(D)=200\cdot 150+150\cdot 100=45000 \\ B(E)=200\cdot 150+150\cdot 0=30000 \end{cases}$$

Por lo tanto, los máximos beneficios (45000€) se alcanzan en el vértice $D(150,100)$, es decir, preparando $\boxed{\text{150 lotes de la marca PC Plus y 100 lotes de la marca Computing.}}$

3.3.2 Región factible no acotada

Si la región factible es abierta, no siempre puede asegurarse la existencia de un máximo o un mínimo de la función objetivo. En este caso conviene hacer una resolución gráfica, dibujando **rectas de nivel**. Estas rectas de nivel son rectas de ecuación $f(x,y)=k$ donde $f(x,y)$ es la función objetivo y k toma diferentes valores. Estas rectas son paralelas y con ellas podemos ver hacia dónde aumenta el valor de k y así encontrar el máximo o el mínimo de $f(x,y)$, si es que existe.

Ejemplo: Vamos a resolver el problema de la dieta anterior.

Un veterinario recomienda una dieta diaria para un gato en la que aparezcan al menos 8 unidades de hidratos de carbono y 7 de proteínas, durante dos meses. Tenemos dos tipos de galletas, A y B, cuyos contenidos son: el producto A tiene 1 unidad de hidratos de carbono y 2 de proteínas por galleta; el producto B tiene 2 unidades de hidratos de carbono y 1 de proteínas por galleta. La caja de 20 galletas A cuesta 10 € y la de 20 galletas B, 7 €.

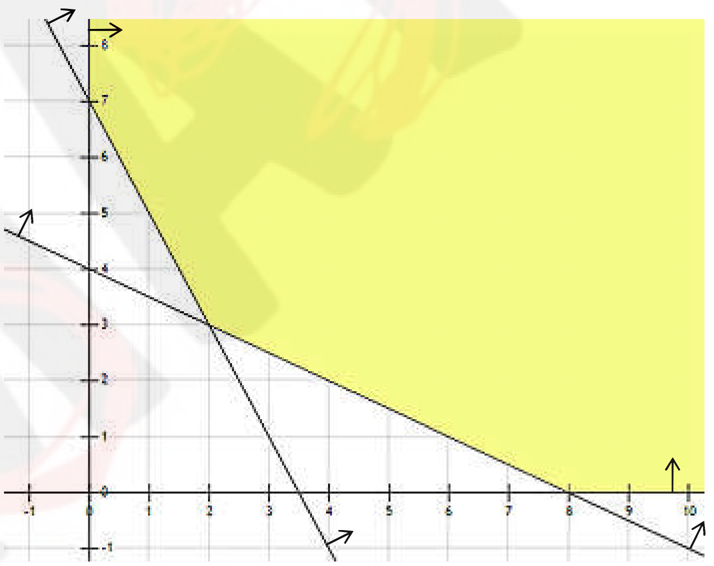
Se trata de averiguar cuantas cajas comprar de cada producto para que el coste sea mínimo (función objetivo), pero cumpliendo con los requisitos que pone el veterinario (restricciones).

Llamamos: $x = \textit{Número de galletas A}$
$y = \textit{Número de galletas B}$

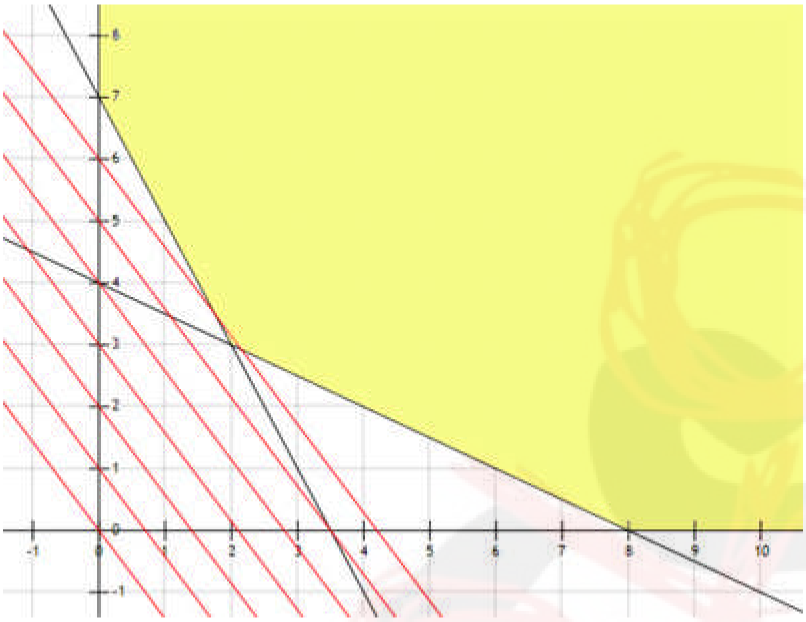
Las restricciones que tenemos que cumplir son las siguientes:

$$\begin{cases} x + 2y \geq 8 & (\textit{Cantidad total de hidratos de carbono mayor que } 8) \\ 2x + y \geq 7 & (\textit{Cantidad total de proteínas mayor que } 7) \\ x \geq 0 & \\ y \geq 0 & (\textit{No se puede comprar un número negativo de galletas}) \end{cases}$$

La región de las soluciones es:



Vemos que la región que cumple todas las restricciones es abierta (no está acotada). Como la función que queremos minimizar es la de los costes que, escrita en céntimos por galleta, es: $f(x, y) = 50x + 35y$, dibujamos rectas de nivel $50x + 35y = k$ con distintos valores de k y observamos hacia donde aumenta y hacia dónde disminuye:



Aumenta el valor de k

Podemos ver que, al aumentar el valor de *k*, el primer punto de la región factible que encontramos (el punto con valor mínimo de *k*) es el punto de corte de las dos rectas dibujadas. Resolviendo el sistema para hallar ese punto de corte obtenemos la solución:

$$\left.\begin{array}{r} x+2y=8 \\ 2x+y=7 \end{array}\right\} \quad Solución: \quad x=2, \quad y=3$$

Por lo tanto, la solución óptima es darle 2 galletas A y 3 galletas B cada día. Como el tratamiento duraba dos meses (60 días), necesitamos 120 galletas A y 180 galletas B. Por lo tanto, deberíamos comprar $\boxed{\text{6 cajas de galletas A y 9 cajas de galletas B.}}$

Podemos observar que en el último ejemplo no existe un máximo para $f(x, y)$. Podemos aumentar k todo lo que queramos y seguiríamos cumpliendo con las restricciones dadas.