4.2 INDETERMINACIONES

4.2.1 Indeterminación $\frac{\mathbf{0}}{\mathbf{0}}$

Si $\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}$, con $f(x)$ y $g(x)$ funciones polinómicas, entonces podemos extraer el factor $(x-a)$ tanto de $f(x)$ como de $g(x)$ y simplificar.

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to a}\frac{\cancel{(x-a)}F(x)}{\cancel{(x-a)}G(x)}=\lim_{x\to a}\frac{F(x)}{G(x)}$$

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{x^2-1}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+4)}{\cancel{(x-1)}(x+1)}=\frac{5}{2}$

Si $f(x)$ ó $g(x)$ tuvieran raíces y no se pudiera sacar el factor $(x-a)$, tendríamos que quitar primero la raíz multiplicando numerador y denominador por lo necesario (la raíz, el conjugado...) y después extraer el factor y simplificar.

Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 1}\frac{x^2+3x-4}{\sqrt{x}-1}=\frac{0}{0}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\left(x^2+3x-4\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\left(\sqrt{x}-1\right)\left(\sqrt{x}+1\right)}=\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+4)\left(\sqrt{x}+1\right)}{\cancel{(x-1)}}=10$

4.2.2 Indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$

El límite en el infinito de un polinomio es igual al límite del término de mayor grado:

$$\lim_{x\to\infty}\left(a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0\right)=\lim_{x\to\infty}a_kx^k,$$

ya que los demás términos son de menor orden. Teniendo esto en cuenta, es fácil resolver la indeterminación $\frac{\infty}{\infty}$, ya que:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a_kx^k+a_{k-1}x^{k-1}+\cdots+a_2x^2+a_1x+a_0}{b_jx^j+b_{j-1}x^{j-1}+\cdots+b_2x^2+b_1x+b_0}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_kx^k}{b_jx^j}=\lim_{x\to\infty}\frac{a_k}{b_j}x^{k-j}=\frac{a_k}{b_j}\lim_{x\to\infty}x^{k-j}$$

Podemos distinguir entonces tres casos dependiendo de los grados del numerador y del denominador:

- Si $k>j$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)}=\pm\infty$, ya que x^{k-j} tiende a infinito.

- Si $k = j$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{a_k}{b_j}$, ya que $x^{k-j} = x^0 = 1$.

- Si $k < j$, entonces $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$, ya que x^{k-j} tiende a cero.

Ejemplo 1: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^5 - 3x^3 + 2x^2 - 4x + 5}{5x^7 + 4x^2 - 2} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4\cancel{x^5}}{5x^{\cancel{7}\,2}} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{5x^2} = 0$

Ejemplo 2: $\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6x^5 - 3x^4 + x^2}{3x^4 + 4x^2 - 2} = \frac{-\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to-\infty} \frac{6x^5}{3x^4} = \lim\limits_{x\to-\infty} 2x = -\infty$

Ejemplo 3: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^4 + 2x^2 + 3x + 1}{3x^4 - x^2 + 4} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4x^4}{3x^4} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{4}{3} = \frac{4}{3}$

4.2.3 Indeterminación $\infty \cdot 0$

Para resolver esta indeterminación tenemos que realizar la multiplicación y transformarla en otra del tipo $\frac{0}{0}$ o del tipo $\frac{\infty}{\infty}$, que ya sabemos resolver.

Ejemplo 1: $\lim\limits_{x\to0} \frac{2}{\sqrt{x^2 - x}} \cdot \frac{x^2}{3} = \infty \cdot 0 = \lim\limits_{x\to0} \frac{2x^2}{3\sqrt{x^2 - x}} = \frac{0}{0} = \lim\limits_{x\to0} \frac{2x^2\sqrt{x^2 - x}}{3\left(\sqrt{x^2 - x}\right)^2} = \lim\limits_{x\to0} \frac{2x^2\sqrt{x^2 - x}}{3x^2 - 3x} =$

$$= \lim\limits_{x\to0} \frac{\cancel{x}\left(2x\sqrt{x^2 - x}\right)}{\cancel{x}\,(3x - 3)} = \frac{0}{-3} = 0$$

Ejemplo 2: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x+5}{x^3+1} \cdot \frac{x^2-1}{2x+3} = 0 \cdot \infty = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3 + 5x^2 - x - 5}{2x^4 + 3x^3 + 2x + 3} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^3}{2x^4} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{1}{2x} = 0$

Ejemplo 3: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{2}{x} \cdot \sqrt{x^2 + 8} = 0 \cdot \infty = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x^2 + 8}}{x} = \frac{\infty}{\infty} = \lim\limits_{x\to\infty} \frac{2\sqrt{x^2}}{x} = \lim\limits_{x\to\infty} 2 = 2$

4.2.4 Indeterminación $\infty - \infty$

Si tenemos el caso $\infty - \infty$ y podemos distinguir que un infinito es de orden superior al otro (por ejemplo, una exponencial frente a un polinomio, o potencias con distinto grado), el límite será $+\infty$ o $-\infty$ según el término que predomine.

Ejemplo 1: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(x^2 - \sqrt{x^5 - 1}\right) = \infty - \infty = -\infty$, porque el grado de la raíz es 5/2, mayor que 2.

Ejemplo 2: $\lim\limits_{x\to\infty} \left(\frac{x^5}{x^2 - 1} - \frac{x^3 - 3}{x + 2}\right) = \infty - \infty = +\infty$, porque el primer infinito es de orden superior (la primera fracción es de grado 3, frente al grado 2 de la segunda).

Si los dos infinitos son del mismo orden, tenemos principalmente dos casos:

1) Diferencia de dos funciones racionales. En este caso, hacemos la resta y nos quedará uno de los casos anteriores.

   Ejemplo: $\lim\limits_{x\to 0}\left(\frac{1}{x}-\frac{x+1}{x^2-x}\right)=\infty-\infty=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(x-1)}{x(x-1)}-\frac{(x+1)}{x(x-1)}=\lim\limits_{x\to 0}\frac{-2}{x^2-x}=-\infty$

2) Diferencia de dos funciones con raíces cuadradas. En este caso, multiplicamos y dividimos por el conjugado de la expresión.

   Ejemplo: $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-x}=\infty-\infty=\lim\limits_{x\to\infty}\left(\sqrt{x^2+5}-\sqrt{x^2-x}\right)\cdot\frac{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2-x}}{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2-x}}=$

$$=\lim_{x\to\infty}\frac{\left(x^2+5\right)-\left(x^2-x\right)}{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2-x}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x+5}{\sqrt{x^2+5}+\sqrt{x^2-x}}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{\sqrt{x^2}+\sqrt{x^2}}=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{2x}=\frac{1}{2}$$

4.2.5 Indeterminación 1^∞

Para resolver esta indeterminación, nos basamos en el hecho de que la sucesión $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ tiende al número e cuando n tiende a infinito y, en general, $\lim\limits_{f(x)\to\infty}\left(1+\frac{1}{f(x)}\right)^{f(x)}=e$. Según esto, si $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=1^\infty$, podemos resolver la indeterminación con la siguiente fórmula:

$$\lim_{x\to a}f(x)^{g(x)}=e^{\lim\limits_{x\to a}\left[\left(f(x)-1\right)g(x)\right]}$$

Demostración: $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\left(1+f(x)-1\right)^{g(x)}=\lim\limits_{x\to a}\left[\left(1+\frac{1}{\frac{1}{f(x)-1}}\right)^{\frac{1}{f(x)-1}}\right]^{\left(f(x)-1\right)g(x)}$

Donde la función dentro del corchete tiene límite e cuando $f(x)\to 1$, ya que $\frac{1}{f(x)-1}\to\infty$

Ejemplo 1: $\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-1}\right)^x=1^\infty=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x^2+3}{x^2-1}-1\right)x}=e^{\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{4x}{x^2-1}\right)}=e^0=1$

Ejemplo 2: $\lim\limits_{x\to 1}\left(x^2-x+1\right)^{\frac{1}{x^2-1}}=1^\infty=e^{\lim\limits_{x\to 1}(x^2-x)\frac{1}{x^2-1}}=e^{\lim\limits_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}x}{\cancel{(x-1)}(x+1)}}=e^{1/2}=\sqrt{e}\simeq 1,65$