4.1 LÍMITES DE FUNCIONES

4.1.1 Límite de una función en un punto

El límite de una función $f(x)$ en el punto $x = a$ es el valor al que se aproxima $f(x)$ cuando la variable independiente *x* se aproxima al valor de *a*. Se representa $\lim_{x\to a} f(x)$ y se lee "límite de $f(x)$ cuando *x* tiende a *a*".

Por ejemplo, en la función $f(x) = x^2$ el límite cuando *x* tiende a 2 es 4, (se escribe $\lim_{x\to 2} f(x) = 4$), ya que, según vemos en las tablas, cuando el valor de *x* se aproxima a 2, el valor de $f(x)$ se aproxima a 4.

x	$f(x) = x^2$
1,7	2,89
1,8	3,24
1,9	3,61
1,99	3,9601
1,999	3,996001
1,9999	3,999600
1,99999	3,999960

x	$f(x) = x^2$
2,3	5,29
2,2	4,84
2,1	4,41
2,01	4,0401
2,001	4,004001
2,0001	4,000400
2,00001	4,000040

Límites laterales

En el ejemplo anterior, el límite es el mismo cuando nos aproximamos a 2 por los valores menores que 2 (tabla de la izquierda), que por los mayores que 2 (tabla de la derecha). Esto no siempre ocurre, así que se habla de límites laterales:

- Límite por la izquierda, $\lim_{x\to a^-} f(x)$, si nos acercamos desde los valores menores que *a*
- Límite por la derecha, $\lim_{x\to a^+} f(x)$, si nos acercamos desde los mayores que *a*

Por ejemplo, en la función $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$, vemos que si nos acercamos a $x = 1$ desde la izquierda el límite es $\lim_{x\to 1^-} f(x) = -\infty$ pero, si nos acercamos por la derecha es $\lim_{x\to 1^+} f(x) = +\infty$

x	$f(x) = \frac{1}{x-1}$
0,7	–3,33
0,8	–5
0,9	–10
0,99	–100
0,999	–1000
09999	–10000
0,99999	–100000

x	$f(x) = \frac{1}{x-1}$
1,3	3,33
1,2	5
1,1	10
1,01	100
1,001	1000
1,0001	10000
1,000001	1000000

Una función tiene límite en un punto cuando existen los dos límites laterales y son iguales. Si algún límite lateral no existe, o no son iguales (como en el segundo ejemplo), se dice que el limite no existe.

Si $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) = L$, entonces se dice que $\lim_{x\to a} f(x) = L$

Si algún límite cuando x tiende a a es $+\infty$ o $-\infty$, se dice que la función $f(x)$ tiene una **asíntota vertical**. Esa asíntota es la recta de ecuación $x=a$. Por ejemplo, la función $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$ tiene una asíntota vertical de ecuación $x=1$, pues ya vimos que los límites laterales eran infinito.

4.1.2 Límites en el infinito

El límite en el infinito de una función es el valor al que tiende la función $f(x)$ cuando la x tiende a infinito.

Por ejemplo, en la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ vemos que, a medida que el valor de la x aumenta, el valor de $f(x)$ disminuye acercándose a cero. Si el valor de la x tiende a $-\infty$, el valor de $f(x)$ se acerca también a cero, por lo que:

x	$f(x)=\dfrac{1}{x}$
1	1
10	0,1
100	001
1000	0,001
10000	0,00001
100000	0,000001
1000000	0,0000001

x	$f(x)=\dfrac{1}{x}$
–1	–1
–10	–0,1
–100	–001
–1000	–0,001
–10000	–0,00001
–100000	–0,000001
–1000000	–0,0000001

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=0 \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

De la misma forma vemos que en la función $f(x)=x^2$ los límites en e infinito son $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2=+\infty$.

Cuando el límite en el infinito de una función es un valor finito a se dice que la función tiene una **asíntota horizontal**. Esta asíntota es una recta de ecuación $y=a$. En los ejemplos anteriores, la función $f(x)=\dfrac{1}{x}$ tiene una asíntota horizontal de ecuación $y=0$, y la función $f(x)=x^2$ no tiene asíntota horizontal.

4.1.3 Propiedades de los límites

- Unicidad del límite: Un mismo límite no puede tener dos valores diferentes. Si existe un límite, es único.

Si tenemos dos funciones f y g y existen los límites $\lim\limits_{x\to a} f(x)=L$ y $\lim\limits_{x\to a} g(x)=M$, entonces se cumplen las siguientes propiedades:

- Límite de una suma: $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)=\lim\limits_{x\to a} f(x)+\lim\limits_{x\to a} g(x)=L+M$

- Límite de una resta: $\lim\limits_{x\to a}(f-g)(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)-\lim\limits_{x\to a}g(x)=L-M$
- Límite de un producto: $\lim\limits_{x\to a}(f\cdot g)(x)=\lim\limits_{x\to a}f(x)\cdot\lim\limits_{x\to a}g(x)=L\cdot M$
- Límite de un cociente: Si $\lim\limits_{x\to a}g(x)\neq 0$, entonces $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=\dfrac{L}{M}$ (*)
- Límite de potencias: Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)>0$, entonces $\lim\limits_{x\to a}f(x)^{g(x)}=\left(\lim\limits_{x\to a}f(x)\right)^{\lim\limits_{x\to a}g(x)}=L^M$

(*) En el caso $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$, siempre que $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq 0$, tendremos que $\lim\limits_{x\to a}\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)=\dfrac{L}{0}$. Este límite da ∞, pero tendremos que calcular los límites laterales para saber el signo, ya que puede ser +∞ ó –∞.

Ejemplo: en la función $f(x)=\dfrac{x^2}{x-2}$, el limite cuando x tiende a 2, aplicando las propiedades de los límites, es $\dfrac{4}{0}$. Si hacemos los límites laterales vemos que $\lim\limits_{x\to 2^-}f(x)=\dfrac{4}{0^-}=-\infty$, ya que la función x^2 tiende a 4 y la función $x-2$, si nos acercamos por la izquierda ($x=1'9999$), tiende a cero con valores negativos (–0'0001, es decir, 0^-). De igual forma, $\lim\limits_{x\to 2^+}f(x)=\dfrac{4}{0^+}=+\infty$, ya que ahora, al acercarnos a 2 por la derecha ($x=2'0001$), $x-2$ se acerca a cero con valores positivos, 0^+.

4.1.4 Cálculo de límites

Dadas las propiedades anteriores se puede concluir que, en general, $\lim\limits_{x\to a}f(x)=f(a)$. Si la función está definida y es continua en *a*, no necesitaremos hacer nada más. Si, por el contrario, tuviésemos problemas para calcular $f(a)$ o bien este no existiera, tendríamos una **indeterminación**, que habrá que resolver.

Son indeterminaciones los casos: $\dfrac{0}{0}$, $\dfrac{\infty}{\infty}$, $\infty\cdot 0$, $\infty-\infty$, 1^∞, 0^0, ∞^0.