4.3 ASÍNTOTAS

4.3.1 Asíntotas verticales

Una función tiene una asíntota vertical cuando en algún valor *a* de la *x* se cumple que $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$. Esto puede ocurrir en funciones racionales cuando se anula el denominador, en funciones logarítmicas o en algunas funciones trigonométricas. Vamos a estudiar solo el primer caso.

Funciones racionales

Cuando el denominador de una función se anula en algún valor de *x*, puede haber una asíntota vertical. Para saberlo, calculamos el límite cuando *x* tiende a *a*. Si ese límite es $\pm\infty$, la función tiene una asíntota vertical de ecuación $x = a$. Si el límite no es infinito, no tiene asíntota vertical en ese punto.

Hay que estudiar todos los puntos en los que el denominador se haga cero.

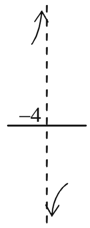
Ejemplo: Estudiar las asíntotas verticales de $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{x^2 + 3x - 4}$

1) Igualamos el denominador a cero para hallar los puntos en los que puede existir una asíntota vertical: $x^2 + 3x - 4 = 0$. Resolviendo la ecuación, obtenemos $x = -4$ y $x = 1$.
2) Hallamos los límites en los puntos anteriores:

- $\lim\limits_{x \to -4} f(x) = \dfrac{(-4)^2 - 1}{(-4)^2 + 3(-4) - 4} = \dfrac{15}{0}$. Este límite es infinito, pero tenemos que estudiar los límites laterales para ver el signo:

$$\left.\begin{array}{l} \lim\limits_{x \to -4^-} \dfrac{x^2 - 1}{(x-1)(x+4)} = \dfrac{+15}{(-5) \cdot 0^-} = \dfrac{+15}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x \to -4^+} \dfrac{x^2 - 1}{(x-1)(x+4)} = \dfrac{+15}{(-5) \cdot 0^+} = \dfrac{+15}{0^-} = -\infty \end{array}\right\}$$

$\boxed{\text{La función tiene asíntota vertical}}$ $\boxed{\text{de ecuación } x = -4}$. La función tiende a $+\infty$ por la izquierda y a $-\infty$ por la derecha.



- $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \dfrac{(1)^2 - 1}{(1)^2 + 3(1) - 4} = \dfrac{0}{0} = \lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{(x-1)}(x+4)} = \dfrac{2}{5}$.

El límite no es infinito, así que $\boxed{\text{no hay asíntota vertical en } x = 1}$

4.3.2 Asíntotas horizontales

Una función tiene una asíntota horizontal cuando $\lim_{x\to\infty} f(x)=b$ o cuando $\lim_{x\to-\infty} f(x)=b$. La asíntota es la recta de ecuación $y=b$. Si ese límite no existe o es $\pm\infty$, la función no tiene asíntota horizontal.

Ejemplo: Estudiar si la función $f(x)=\dfrac{2x+1}{x}$ tiene asíntota horizontal.

Hallamos el límite en el infinito: $\lim_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x}{x}=2$. El límite es una cantidad finita así que $\boxed{f(x) \text{ tiene asíntota horizontal de ecuación } y=2}$. Vemos que obtenemos el mismo resultado si hacemos el límite en $-\infty$.

4.3.3 Asíntotas oblicuas

Una recta $y=mx+n$ con $m\neq 0$ es una asíntota oblicua de una función si la función se acerca a esa recta en el infinito. Analíticamente, esto ocurre cuando:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=m \quad \text{y} \quad \lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=n, \quad \text{o bien si} \quad \lim_{x\to-\infty}\frac{f(x)}{x}=m \quad \text{y} \quad \lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-mx\right]=n$$

Para que esto ocurra, el límite de la función en el infinito tiene que ser infinito, por lo que solo podrá haber asíntota oblicua si no la hay horizontal.

Ejemplo: Estudiar si la función $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x+3}$ tiene asíntota oblicua:

$\lim_{x\to\infty} f(x)=\dfrac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\dfrac{2x^2}{x}=\infty$. La función no tiene asíntota horizontal. Puede tenerla oblicua. Vamos a estudiarlo:

$$m=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2-1}{x^2+3x}=\frac{\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{2x^2}{x^2}=2$$

$$n=\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-mx\right]=\lim_{x\to\infty}\left[\frac{2x^2-1}{x+3}-2x\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{\cancel{2x^2}-1\cancel{-2x^2}-6x}{x+3}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to\infty}\frac{-6x}{x}=-6$$

Por lo tanto, $\boxed{f(x) \text{ tiene una asíntota oblicua de ecuación } y=2x-6}$

Si alguno de los límites para hallar *m* o *n* da infinito o no existe, la función no tiene asíntota oblicua.

4.3.4 Aproximación en las asíntotas horizontales y oblicuas

Si queremos dibujar la gráfica de una función y esta tiene asíntota horizontal u oblicua, necesitamos saber si la función se acerca a la asíntota por encima o por debajo, tanto en $+\infty$ como en $-\infty$. Para ello, hallamos los límites $\lim\limits_{x\to\infty}\left[f(x)-(mx+n)\right]$ y $\lim\limits_{x\to-\infty}\left[f(x)-(mx+n)\right]$, donde $mx+n$ es la ecuación de la asíntota (si es horizontal, $m=0$).

Esos límites son cero, ya que la función se acerca a la asíntota. Lo que nos interesa es el signo del límite. Si es 0^+, la función se acerca por encima de la asíntota y si es 0^-, se acerca por debajo.

Ejemplo: En la función anterior, $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x+3}$, la asíntota era $y=2x-6$.

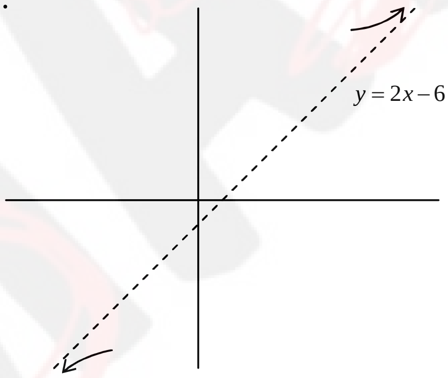
Vamos a ver por donde se acerca:

$$f(x)-(mx+n)=\frac{2x^2-1}{x+3}-\left(2x-6\right)=\frac{2x^2-1}{x+3}-\frac{2x^2-18}{x+3}=\frac{17}{x+3}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left[f(x)-(mx+n)\right]=\lim_{x\to\infty}\frac{17}{x+3}=\frac{+17}{+\infty}=0^+$$

$$\lim_{x\to-\infty}\left[f(x)-(mx+n)\right]=\lim_{x\to-\infty}\frac{17}{x+3}=\frac{+17}{-\infty}=0^-$$

Por lo tanto, la función se acerca a la asíntota por encima cuando $x\to\infty$ y por debajo cuando $x\to-\infty$:



4.3.5 Asíntotas horizontales y oblicuas en funciones racionales

Si la función $f(x)$ es un cociente de polinomios $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, con k y m los grados de $P(x)$ y de $Q(x)$ respectivamente, podemos simplificar lo anterior y concluir que la función tendrá asíntota horizontal cuando $k\le m$ y asíntota oblicua cuando $k=m+1$. En el caso $k>m+1$ la función tendrá ramas parabólicas en el infinito, pero no asíntota.

En los casos en que tenga asíntota, es decir, si $k \le m+1$ podemos hallarla simplemente realizando la división $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$. Al efectuarla, obtenemos un cociente $C(x)$ y un resto $R(x)$. $C(x)$ es la ecuación de la asíntota, y con $R(x)$ podemos saber si $f(x)$ se acerca por encima o por debajo, calculando los límites $\underset{x\to\infty}{lím}\dfrac{R(x)}{Q(x)}$ y $\underset{x\to-\infty}{lím}\dfrac{R(x)}{Q(x)}$

Ejemplo 1: Vamos a ver el ejemplo anterior con este método: $f(x)=\dfrac{2x^2-1}{x+3}$

$$\begin{array}{rl} 2x^2 \quad -1 & \underline{|\,x+3} \\ \underline{-2x^2-6x} & 2x-6 \\ -6x-1 & \\ \underline{+6x+18} & \\ 17 & \end{array}$$

o bien, en este caso, con la regla de Ruffini:

$$\begin{array}{r|rrr} & 2 & 0 & -1 \\ -3 & & -6 & 18 \\ \hline & 2 & -6 & \boxed{17} \end{array}$$

Vemos que el cociente de la división es la ecuación de la asíntota que habíamos obtenido, $y=2x-6$, y que $f(x)-(mx+n)$ es $\dfrac{17}{x+3}$, es decir, $\dfrac{R(x)}{Q(x)}$.

Ejemplo 2: Estudiar las asíntotas en el infinito de $f(x)=\dfrac{x^4-3x^3-x^2}{x^3-2x+1}$

Como el grado del numerador es uno más que el del denominador, $f(x)$ tendrá una asíntota oblicua. Para hallarla, realizamos la división:

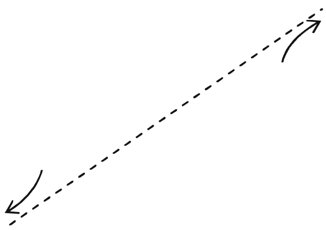
$$\begin{array}{rl} x^4-3x^3-x^2 & \underline{|\,x^3-2x^2+1} \\ \underline{-x^4+2x^3-x} & x-1 \\ -x^3-x^2-x & \\ \underline{+x^3-2x^2+1} & \\ -3x^2-x+1 & \end{array}$$

La asíntota es la recta $y=x-1$

Para saber si se acerca por encima o por debajo, hacemos los límites:

$$\underset{x\to\infty}{lím}\frac{-3x^2-x+1}{x^3-2x+1}=\frac{-\infty}{\infty}=\underset{x\to\infty}{lím}\frac{-3x^2}{x^3}=\frac{-3}{+\infty}=0^-$$

$$\underset{x\to-\infty}{lím}\frac{-3x^2-x+1}{x^3-2x+1}=\frac{-\infty}{-\infty}=\underset{x\to-\infty}{lím}\frac{-3x^2}{x^3}=\frac{-3}{-\infty}=0^+$$



Se acerca por debajo en $x\to+\infty$ y por encima en $x\to-\infty$