4.4 CONTINUIDAD DE FUNCIONES

4.4.1 Continuidad de una función en un punto

Una función $f(x)$ es continua en el punto $x=a$ si existe $\lim_{x \to a} f(x)$ y es igual a $f(a)$. Es decir, tienen que existir los dos límites laterales y ser iguales al valor de la función en el punto:

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x) = f(a)$$

Tenemos que estudiar la continuidad en aquellos puntos en los que la función presente algún problema (principalmente puntos que anulan el denominador y puntos donde cambia la función en funciones definidas a trozos).

Ejemplo: Estudiar la continuidad de la función $f(x) = \begin{cases} x^2 - 3 & si \;\; x < 0 \\ \dfrac{x+3}{x-1} & si \;\; x \geq 0 \end{cases}$

Tenemos que estudiar la continuidad en los puntos $x=0$ (porque la función cambia) y en $x=1$ (porque anula el denominador de la segunda función).

- En $x=0$:

  A la izquierda de $x=0$ la función es x^2-3, así que $\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} \left(x^2-3\right) = -3$.

  A la derecha, en cambio, la función es $\dfrac{x-3}{x+1}$, así que $\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \left(\dfrac{x+3}{x-1}\right) = -3$

  Por su parte, $f(0) = -3$, de modo que $\boxed{\text{la función es continua en } x=0}$.

- En $x=1$:

  A la izquierda la función es $\dfrac{x-3}{x+1}$, por lo que $\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} \dfrac{x+3}{x-1} = \dfrac{+4}{0^-} = -\infty$

  A la derecha también es $\dfrac{x-3}{x+1}$, así que $\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} \dfrac{x+3}{x-1} = \dfrac{+4}{0^+} = +\infty$

  Además, $f(1)$ no existe, por lo que $\boxed{\text{la función es discontinua en } x=1}$.

Una función es <u>continua en un intervalo</u> cuando es continua en todos los puntos del intervalo y es <u>continua en todo su dominio</u> cuando lo es en todos los puntos en los que esta definida. Cuando la función es discontinua en un punto, hay que estudiar que tipo de discontinuidad presenta, ya que hay varios tipos.

4.4.2 Discontinuidad evitable

Ocurre cuando los límites laterales son iguales, pero no coinciden con la función en el punto: $\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x) \neq f(a)$

Ejemplo: La función $f(x) = \dfrac{x^2-3x+2}{x^2-1}$ tiene una discontinuidad evitable en $x=1$, ya que

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{0}{0} = \lim_{x\to 1} \frac{\cancel{(x-1)}(x-2)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{-1}{2}$$ por los dos lados, pero $f(1)$ no existe.

4.4.3 Discontinuidad de primera especie

Ocurre cuando los límites laterales existen, pero no coinciden. Si ambos límites son finitos, se dice que la discontinuidad es de **salto finito**. Si alguno de los límites laterales (o los dos) es infinito, se dice que la discontinuidad es de **salto infinito**.

Ejemplo: La función $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x+4}{2} & si \;\; x<0 \\ x^2-1 & si \;\; 0\le x\le 3 \\ \dfrac{x}{x-3} & si \;\; x>3 \end{cases}$ tiene dos discontinuidades de primera especie, una de salto finito en $x=0$, ya que $\lim_{x\to 0^-} f(x) = \dfrac{0+4}{2} = 2$ es distinto de $\lim_{x\to 0^+} f(x) = 0^2-1=-1$, pero los dos son finitos; y otra de salto infinito en $x=3$, ya que $\lim_{x\to 3^-} f(x) = 3^2-1=8$ es distinto de $\lim_{x\to 3^+} f(x) = \dfrac{3}{0^+} = +\infty$ y uno de ellos es infinito.

4.4.4 Discontinuidad de segunda especie

Ocurre cuando uno de los límites laterales no existe. Por ejemplo, en la función $f(x) = \begin{cases} x+2 & si \;\; x<-2 \\ 2x-1 & si \;\; x\ge 3 \end{cases}$ hay dos discontinuidades de segunda especie, una en $x=-2$, porque no existe el límite por la derecha $\lim_{x\to -2^+} f(x)$; y otra en $x=3$ porque no existe el límite por la izquierda $\lim_{x\to 3^-} f(x)$.