5.1 *DERIVADA DE UNA FUNCIÓN EN UN PUNTO*

5.1.1 Tasa de Variación Media

Si en una función $f(x)$ tomamos dos puntos $A=\left(a, f(a)\right)$ y $B=\left(b, f(b)\right)$, la Tasa de Variación Media (T.V.M.) es la pendiente de la recta que une esos dos puntos:

$$T.V.M.\left[a,b\right]=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$

Si llamamos *h* a la distancia entre *a* y *b*, tenemos que $b=a+h$ y podemos reescribir la fórmula anterior como:

$$T.V.M.\left[a,a+h\right]=\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ejemplo: Halla la Tasa de Variación Media de $f(x)=\dfrac{x^2+x+3}{2x+3}$ en el intervalo $\left[-3,\ 6\right]$

$$T.V.M.\left[-3,6\right]=\frac{f(6)-f(-3)}{6-(-3)}=\frac{3-(-3)}{9}=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

5.1.2 Derivada de una función en un punto

Se llama derivada de la función $f(x)$ en $x=a$, y se representa $f'(a)$, al límite de la Tasa de Variación Media en $\left[a,b\right]$ cuando *b* se acerca a *a*, es decir, cuando la distancia entre ellos, *h*, tiende a cero.

$$f'(a)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$$

Ejemplo: Calcula la derivada de $f(x)=2x^2$ en $x=1$:

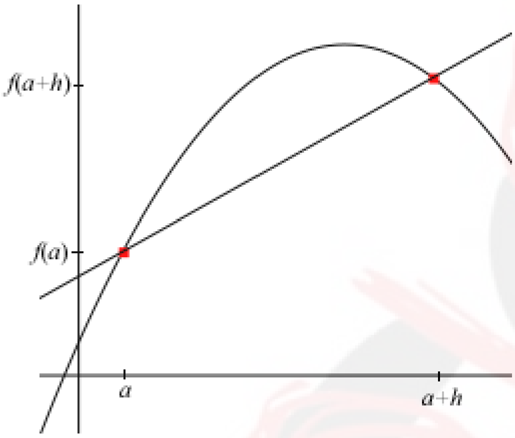
$$f'(1)=\lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2(1+h)^2-2}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{2+4h+2h^2-2}{h}=\lim_{h\to 0}(4+2h)=4$$

Como la derivada es un límite, podemos hablar también de **derivadas laterales,** por la izquierda: $f'(a^-)=\lim_{h\to 0^-}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$; y por la derecha: $f'(a^+)=\lim_{h\to 0^+}\dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$.

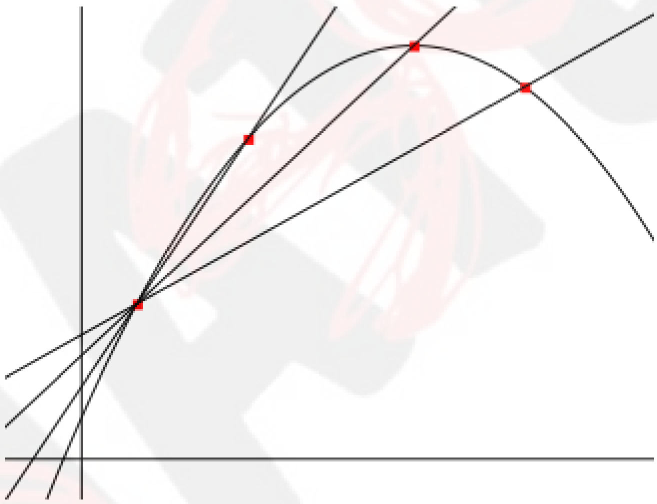
La derivada en un punto existirá entonces cuando esos límites existan y sean iguales. Si los límites existen pero no son iguales (o no existen), la función no es derivable en ese punto.

5.1.3 Interpretación geométrica de la derivada en un punto

Ya vimos que la Tasa de Variación Media en el intervalo $[a, a+h]$ era la pendiente de la recta que unía los puntos $A=(a, f(a))$ y $B=(a+h, f(a+h))$



Al hacer h más pequeño y acercar los puntos, la recta se aproxima más a la recta tangente en el punto $A=(a, f(a))$,



por lo que el límite de la T.V.M cuando h tiende a cero, es decir, la derivada de $f(x)$ en $x=a$, nos da **la pendiente de la recta tangente** a $f(x)$ en $x=a$.

Ejemplo: Calcula la ecuación de la recta tangente a $f(x)=x^2-2x+5$ en $x=3$

Hallamos primero la pendiente de la recta, que es la derivada de $f(x)$ en $x=3$:

$$m=f'(3)=\underset{h\to 0}{lím}\frac{f(3+h)-f(3)}{h}=\underset{h\to 0}{lím}\frac{\left[(3+h)^2-2(3+h)+5\right]-\left[3^2-2\cdot 3+5\right]}{h}=$$

$$=\underset{h\to 0}{lím}\frac{9+6h+h^2-6-2h+5-8}{h}=\underset{h\to 0}{lím}\frac{h^2+4h}{h}=\underset{h\to 0}{lím}(h+4)=4$$

La pendiente es $m=4$ y un punto de la recta es el punto de tangencia, $(3, f(3))=(3,8)$, así que la recta tangente es: $(y-8)=4(x-3)\longrightarrow \boxed{y=4x-4}$