5.2 FUNCIÓN DERIVADA

5.2.1 Función derivada

Si en vez de hallar la derivada en un punto $x=a$, hacemos el calculo genérico para un punto cualquiera *x*, hallamos la función derivada de $f(x)$, que se escribe $f'(x)$. Es decir:

$$f'(x)=\underset{h\to 0}{lím}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

Ejemplo: Halla la función derivada de $f(x)=\dfrac{1}{2x}$

$$f'(x)=\underset{h\to 0}{lím}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\underset{h\to 0}{lím}\frac{\frac{1}{2(x+h)}-\frac{1}{2x}}{h}=\underset{h\to 0}{lím}\frac{\frac{x}{2x(x+h)}-\frac{x+h}{2x(x+h)}}{h}=$$

$$=\underset{h\to 0}{lím}\frac{-h}{2xh(x+h)}=\underset{h\to 0}{lím}\frac{-1}{2x(x+h)}=\frac{-1}{2x^2}$$

Una vez hallada la función derivada, podemos hallar la derivada en cualquier punto $x=a$ sustituyendo en $f'(x)$.

Ejemplo: Calcula la derivada de $f(x)=\sqrt{x}$ en $x=0$, en $x=1$ y en $x=3$.

- Hallamos primero la función derivada:

$$f'(x)=\underset{h\to 0}{lím}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=\underset{h\to 0}{lím}\frac{\sqrt{x+h}-\sqrt{x}}{h}=\underset{h\to 0}{lím}\frac{\left(\sqrt{x+h}-\sqrt{x}\right)\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=$$

$$=\underset{h\to 0}{lím}\frac{\left(x+h\right)-x}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\underset{h\to 0}{lím}\frac{h}{h\left(\sqrt{x+h}+\sqrt{x}\right)}=\underset{h\to 0}{lím}\frac{1}{\sqrt{x+h}+\sqrt{x}}=\frac{1}{2\sqrt{x}}$$

- Ahora sustituimos por los puntos pedidos:

\# $f'(0)=\dfrac{1}{2\sqrt{0}}$, que no existe, pero sí existe por la derecha: $f'(0^+)=\dfrac{1}{2\sqrt{0^+}}=+\infty$

(Esto significa que la recta tangente es una recta vertical)

\# $f'(1)=\dfrac{1}{2\sqrt{1}}=\dfrac{1}{2}$

\# $f'(3)=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$

5.2.2 Derivadas de orden superior

Si calculamos la derivada de la función derivada, obtenemos la derivada segunda de $f(x)$, que se representa por $f''(x)$. Si, a su vez, derivamos esta, obtenemos la derivada tercera $f'''(x)$ y así sucesivamente para $f^{IV}(x)$, $f^{V}(x)$...

La derivada de orden *n* se llama derivada *n*-ésima, representada por $f^{n}(x)$.

Ejemplo: Para la función $f(x)=\frac{1}{x}$, obtenemos las siguientes derivadas:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x)-f(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{hx(x+h)}=\frac{-1}{x^2}$$

$$f''(x)=\lim_{h\to 0}\frac{f'(x)-f'(x)}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{-1}{(x+h)^2}-\frac{-1}{x^2}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{\cancel{-x^2}\ \cancel{+x^2}+h^2+2xh}{x^2(x+h)^2}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}(h+2x)}{\cancel{h}x^2(x+h)^2}=\frac{2x}{x^2(x)^2}=\frac{2}{x^3}$$

Si calculamos la derivada tercera obtenemos $f'''(x)=\frac{-6}{x^4}$, para la derivada cuarta, $f^{IV}(x)=\frac{24}{x^5}$ y así sucesivamente.*

Observamos que:

- El signo va alternando: en las derivadas de orden par es positivo, y en las de orden impar es negativo. Para la derivada *n*-ésima será entonces $(-1)^n$.
- El numerador (sin el signo) de $f'(x)$ es 1, el de $f''(x)$ es 2 (=2·1), el de $f'''(x)$ es 6 (=3·2·1=3!), el de $f^{IV}(x)$ es 24 (=4·3·2·1=4!), etc. Para la derivada *n*-ésima será entonces *n*!
- El denominador es una potencia de exponente 1 más que el orden de la derivada, así que en la derivada *n*-ésima será x^{n+1}.

Uniendo todo esto, podemos concluir que la derivada *n*-ésima de $f(x)=\frac{1}{x}$ es:

$$f^{n}(x)=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}$$

Por ejemplo: $f^{25)}(x)=\frac{-25!}{x^{26}}$

(*) Estos cálculos se hacen mucho más rápido utilizando las reglas de derivación, que veremos en el próximo punto del tema.