5.3 REGLAS DE DERIVACIÓN

El cálculo de la derivada de una función utilizando la fórmula de la definición se hace largo y, hecho una vez, siempre vamos a llegar al mismo resultado así que, en la práctica, resulta más útil hacerlos una vez para cada tipo de función y utilizar luego los resultados, conocidos como **reglas de derivación**.

5.3.1 Derivada de una constante

Hallamos la derivada usando el límite y el resultado es la regla de derivación.

Si $f(x)=k$, entonces $f'(x)=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{k-k}{h}=\lim\limits_{h\to 0}\dfrac{0}{h}=0$

La regla de derivación nos dice entonces que la derivada de una constante es cero.

5.3.2 Derivada de una potencia

Calculamos la derivada de una potencia cualquiera, con exponente *n*, $f(x)=x^n$, utilizando el binomio de Newton:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{(x+h)^n-x^n}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\binom{n}{0}\cancel{x^n}+\binom{n}{1}x^{n-1}h+\binom{n}{2}x^{n-2}h^2+\dots+\binom{n}{n-1}xh^{n-1}+\binom{n}{n}h^n-\cancel{x^n}}{h}=$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\cancel{h}\left[\binom{n}{1}x^{n-1}+\binom{n}{2}x^{n-2}h+\dots+\binom{n}{n-2}x^2h^{n-3}+\binom{n}{n-1}xh^{n-2}+\binom{n}{n}h^{n-1}\right]}{\cancel{h}}=\binom{n}{1}x^{n-1}=nx^{n-1}$$

Tenemos entonces como regla de derivación que la derivada de $f(x)=x^n$ es $f'(x)=nx^{n-1}$. Esta regla nos sirve para hallar la derivada de cualquier potencia sin recurrir al límite.

Ejemplos: $f(x)=x^{10}\longrightarrow f'(x)=10x^9$

$f(x)=x^{26}\longrightarrow f'(x)=26x^{25}$

Como casos particulares tenemos

Para $n=1$: $\boxed{f(x)=x\longrightarrow f'(x)=1}$

Para $n=-1$: $f(x)=x^{-1}\longrightarrow f'(x)=-1\cdot x^{-2}$, es decir, $\boxed{f(x)=\dfrac{1}{x}\longrightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{x^2}}$

En general, para *n* negativa: $\boxed{f(x)=\dfrac{1}{x^n}\longrightarrow f'(x)=\dfrac{-n}{x^{n+1}}}$

5.3.3 Derivada de una raíz

Si $f(x)=\sqrt[n]{x}$, poniendo la raíz en forma de potencia y utilizando la regla anterior, obtenemos: $f(x)=\sqrt[n]{x} \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{n\sqrt[n]{x^{n-1}}}$

Ejemplo: $f(x)=\sqrt[5]{x} \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{5\sqrt[5]{x^4}}$

Caso particular (Raíz cuadrada): $f(x)=\sqrt{x} \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

5.3.4 Derivada de una exponencial

Si $f(x)=a^x$, obtenemos: $f(x)=a^x \longrightarrow f'(x)=a^x Lna$

Ejemplo: $f(x)=3^x \longrightarrow f'(x)=3^x Ln3$

Caso particular (Base *e*): $f(x)=e^x \longrightarrow f'(x)=e^x$

5.3.5 Derivada de un logaritmo

Hallamos la derivada de $f(x)=Log_a x$ utilizando el límite y obtenemos:

$$f(x)=Log_a x \longrightarrow f'(x)=\frac{1}{x\,Lna}$$

Ejemplo: $f(x)=Log_5 x \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x\,Ln5}$

Caso particular (Logaritmo neperiano): $f(x)=Lnx \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{x}$

5.3.6 Derivada de funciones trigonométricas

Para las funciones trigonométricas, las reglas de derivación son:

$f(x)=senx \longrightarrow f'(x)=cosx$; $f(x)=cosx \longrightarrow f'(x)=-senx$

$f(x)=tgx \longrightarrow f'(x)=1+tg^2x$ o bien: $f'(x)=\dfrac{1}{cos^2x}$ (los dos resultados son útiles)

$f(x)=arcsenx \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$; $f(x)=arccosx \longrightarrow f'(x)=\dfrac{-1}{\sqrt{1-x^2}}$

$f(x)=arctgx \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$

5.3.7 Derivada de una suma

Por las propiedades de la suma de límites $\lim_{x\to a}\left(f(x)+g(x)\right)=\lim_{x\to a} f(x)+\lim_{x\to a} g(x)$ y de la suma de funciones $\left(f+g\right)(x)=f(x)+g(x)$, es fácil demostrar que la derivada de una suma es la suma de las derivadas (se aplica lo mismo para la resta).

$$(f+g)'(x)=f'(x)+g'(x) \qquad\qquad (f-g)'(x)=f'(x)-g'(x)$$

Ejemplo: $f(x)=\sqrt{x}-Lnx \longrightarrow f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}-\dfrac{1}{x}$

5.3.8 Derivada del producto de un número por una función

Al igual que en el caso de la suma, utilizando las propiedades de los límites y de las funciones, obtenemos que $(k\cdot f)'(x)=k\cdot f'(x)$

Ejemplos: $f(x)=3x^5 \longrightarrow f'(x)=3\cdot 5x^4=15x^4$

$$f(x)=\frac{x^3}{4} \longrightarrow f'(x)=\frac{3x^2}{4}$$

Es decir, los números reales multiplicando o dividiendo se dejan y se deriva la función.

5.3.9 Derivada del producto de dos funciones

Cuando tenemos un producto de funciones, la derivada es la siguiente:

$$\left(f\cdot g\right)'(x)=f'(x)\cdot g(x)+f(x)\cdot g'(x)$$

La derivada del producto de dos factores es "el primero derivado por el segundo sin derivar más el primero sin derivar por el segundo derivado".

Ejemplo: $f(x)=x^4\cdot 2^x$ es el producto de una potencia por una exponencial. La derivada, utilizando la regla del producto, es $f'(x)=4x^3\cdot 2^x+x^4\cdot 2^x Ln2$

Si sacamos los factores comunes: $f'(x)=x^3\cdot 2^x\left(4+xLn2\right)$

5.3.10 Derivada de un cociente de funciones

La derivada de un cociente $\left(\dfrac{f}{g}\right)(x)$, siempre que $g(x)\neq 0$, es:

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x)=\frac{f'(x)\cdot g(x)-f(x)\cdot g'(x)}{\left(g(x)\right)^2}$$

La derivada de un cociente es, por lo tanto, “la derivada del numerador por el denominador sin derivar, menos el numerador sin derivar por la derivada del denominador, dividido todo entre el cuadrado del denominador”.

Ejemplo: Derivar la función $f(x)=\dfrac{2x^2+3x-1}{x^4+2}$

$$f'(x)=\frac{(4x+3)\left(x^4+2\right)-\left(2x^2+3x-1\right)\left(4x^3\right)}{\left(x^4+2\right)^2}=\frac{4x^5+3x^4+8x+6-8x^5-12x^4+4x^3}{\left(x^4+2\right)^2}=$$

$$=\frac{-4x^5-9x^4+4x^3+8x+6}{\left(x^4+2\right)^2}$$

5.3.11 Regla de la cadena

Normalmente no tenemos funciones simples como Lnx o x^4, sino que tenemos funciones compuestas, es decir, funciones “dentro” de funciones, como Lnx^4 o $e^{\sqrt{3x}}$. Para derivar estas se utiliza la regla de la cadena:

$$\left(f\left(g(x)\right)\right)'=f'\left(g(x)\right)\cdot g'(x)$$

Veámoslo con algún ejemplo:

Si $f(x)=\sqrt{Lnx}$, tenemos la raíz cuadrada de un logaritmo. Derivamos entonces la raíz cuadrada y después multiplicamos por la derivada del logaritmo: $f'(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{Lnx}}\cdot\dfrac{1}{x}$

La regla de la cadena se generaliza para tres o más funciones. Por ejemplo, en $f(x)=\sqrt[3]{5^{cosx}}$

la derivada es $f'(x)=\overbrace{\dfrac{1}{3\sqrt[3]{\left(5^{cosx}\right)^2}}}^{\text{Derivada de la raíz cúbica}}\cdot\overbrace{5^{cosx}Ln5}^{\text{Derivada de la exponencial}}\cdot\overbrace{(-senx)}^{\text{Derivada del coseno}}$

¡CUIDADO!: En la regla de la cadena se derivan las funciones <u>de una en una</u>. Si tenemos $f(x)=senx^3$, <u>la derivada no es $f'(x)=cos3x^2$</u>, no se derivan el seno y la potencia en el mismo paso, sino que primero derivamos el seno y después multiplicamos por la derivada de la potencia: $f'(x)=cosx^3\cdot 3x^2$

$$f(x)=senx^3 \quad \begin{array}{ll} \cancel{f'(x)=cos3x^2} & MAL \\ f'(x)=cosx^3\cdot 3x^2 & BIEN \end{array}$$