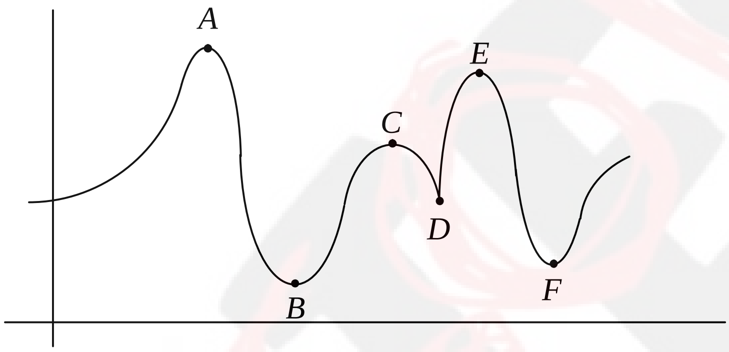
6.2 EXTREMOS RELATIVOS. MÁXIMOS Y MÍNIMOS

6.2.1 Máximos y mínimos relativos

Una función tiene un máximo relativo en $x = x_0$ si existe un entorno reducido de x_0 en el que en todos los puntos del entorno se cumple que $f(x) < f(x_0)$.

De igual forma, la función tiene un mínimo relativo en $x = x_0$ si existe un entorno reducido de x_0 en el que en todos los puntos del entorno se cumple que $f(x) > f(x_0)$.

Así, en la siguiente gráfica tenemos máximos relativos en *A*, *C* y *E*, y mínimos relativos en *B*, *D* y *F*.



Podemos observar en la gráfica que la recta tangente en los puntos *A*, *B*, *C*, *E* y *F* es horizontal, es decir, la pendiente (y la derivada) es cero. Sin embargo, en el punto *D* no ocurre eso. Esto es porque en el punto *D* la función no es derivable: por la izquierda y por la derecha los límites que nos dan la derivada son diferentes. Podemos resumir que si una función es derivable en un máximo o en un mínimo, la derivada es cero.

6.2.2 Puntos críticos

Se llaman puntos críticos de una función a los puntos en los que la derivada es cero. Entre ellos, como vimos en el apartado anterior, estarán los máximos y los mínimos de la función. Para hallar los puntos críticos solo tenemos que derivar la función, igualar la derivada a cero y resolver la ecuación que resulte.

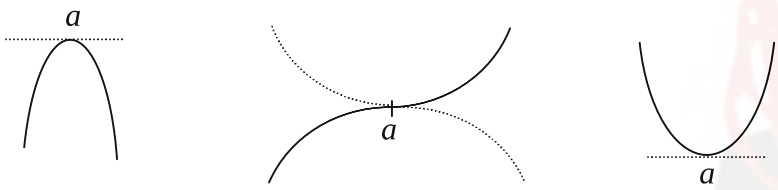
Ejemplo: Hallar los puntos críticos de $f(x) = \frac{x^5}{10} - x^4 - 8x^3$

La derivada de $f(x)$ es $f'(x) = \frac{x^4}{2} - 4x^3 - 24x^2$, de modo que:

$$\frac{x^4}{2} - 4x^3 - 24x^2 = 0 \longrightarrow \frac{x^2}{2}(x^2 - 8x - 48) = 0 \longrightarrow \begin{cases} x_1 = -4 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = 12 \end{cases} \quad \text{(3 puntos críticos)}$$

6.2.3 Estudio de los puntos críticos

Como hemos visto, los puntos críticos pueden ser máximos o mínimos de la función, pero puede ser también que no sean ni lo uno ni lo otro, y sean un **punto de inflexión**. Como vemos en la siguientes gráficas, en los tres casos la derivada en $x = a$ es cero:



Para distinguir a qué caso de los tres pertenece un punto crítico, necesitamos hacer la segunda derivada de $f(x)$ en $x = a$. Nos encontramos con las siguientes posibilidades:

- $f''(a) < 0 \rightarrow Máximo$. Si la segunda derivada en el punto crítico es menor que cero, es un máximo.
- $f''(a) > 0 \rightarrow Mínimo$. Si la segunda derivada en el punto crítico es mayor que cero, es un mínimo.
- Si $f''(a) = 0$, necesitamos hacer las derivadas sucesivas hasta que encontremos una que no se anule.
  - Si la primera derivada que no se anula es de orden impar, el punto crítico es un punto de inflexión
  - Si es de orden par, igual que en la segunda, es decir, mayor que cero un mínimo y menor que cero un máximo.

Ejemplo: En el ejemplo anterior, $f(x) = \frac{x^5}{10} - x^4 - 8x^3$, teníamos tres puntos críticos. Vamos a ver a qué corresponde cada uno.

Primero hallamos la segunda derivada, que es $f''(x) = 2x^3 - 12x^2 - 48x$, y vemos qué pasa en cada punto:

- $f''(-4) = 2(-4)^3 \cancel{-12(-4)^2} \cancel{-48(-4)} < 0$. Por tanto $\boxed{\text{en } x = -4 \text{ hay un máximo}}$.
- $f''(0) = 0$. Hallamos la derivada tercera: $f'''(x) = 6x^2 - 24x - 48$. En $x = 0$, vemos que $f'''(0) = -48 \neq 0$. La primera derivada que es distinta de cero es de orden impar, de modo que $\boxed{\text{en } x = 0 \text{ hay un punto de inflexión}}$.
- $f''(12) = 2(12)^3 - 12(12)^2 - 48(12) > 0$, así que $\boxed{\text{en } x = 12 \text{ hay un mínimo}}$.