6.3 TABLAS DE SIGNOS

Una tabla de signos nos dice si una función es positiva o negativa en cada punto de la recta real. Sirve para resolver inecuaciones del tipo $f(x) > 0$, $f(x) \geq 0$, $f(x) < 0$ ó $f(x) \leq 0$. Junto con la derivada, nos sirve también para saber la monotonía y la curvatura, es decir, dónde una función es creciente o decreciente y, en cada caso, si es cóncava o convexa.
Vamos a ver los pasos necesarios para completar una tabla de signos:

PRIMER PASO: Descomponer $f(x)$ en factores

Es fácil ver que $\left(x-4\right)$ es positivo cuando el valor de x es mayor que 4 y negativo si es menor. En cambio, no es tan fácil a primera vista conocer el signo de $\left(x^2-3x+4\right)$, por eso lo primero es descomponer la función en factores.

Por ejemplo, si tenemos la función $f(x)=\dfrac{x^2-4x+3}{x^2-4}$, la descomponemos de la forma $f(x)=\dfrac{\left(x-1\right)\left(x-3\right)}{\left(x-2\right)\left(x+2\right)}$. De esta forma tenemos cuatro factores de los cuales es fácil saber el signo.

SEGUNDO PASO: Hallar los puntos con posible cambio de signo de $f(x)$

Los puntos en los que una función puede cambiar de signo son:

- Puntos en los que $f(x)=0$
- Puntos en los que $f(x)$ es discontinua

En la práctica, son todos los puntos que anulan alguno de los factores en que se ha descompuesto $f(x)$ y, si la función es definida a trozos, los puntos que delimitan los trozos.

TERCER PASO: Construir la tabla

Para elaborar la tabla de signos de $f(x)$, marcamos en la línea superior, desde $-\infty$ hasta $+\infty$, los puntos hallados en el segundo paso, de menor a mayor, para tener los intervalos de la función en los que el signo no cambia.
En el ejemplo anterior, serían los puntos -2, $+1$, $+2$ y $+3$.

$-\infty$	-2	$+1$	$+2$	$+3$	$+\infty$

Después añadimos una fila para cada factor:

$$-\infty \qquad -2 \qquad +1 \qquad +2 \qquad +3 \qquad +\infty$$

$(x+2)$					
$(x-1)$					
$(x-2)$					
$(x-3)$					

y rellenamos con los signos de cada factor en cada intervalo. Por ejemplo, el factor $(x+2)$ es negativo si x es menor que -2 y positivo si es mayor, el factor $(x-1)$ es negativo si x es menor que $+1$ y positivo si es mayor, etc:

$$-\infty \qquad -2 \qquad +1 \qquad +2 \qquad +3 \qquad +\infty$$

$(x+2)$	–	+	+	+	+
$(x-1)$	–	–	+	+	+
$(x-2)$	–	–	–	+	+
$(x-3)$	–	–	–	–	+

El signo de $f(x)$ en cada intervalo será el producto de todos los signos en ese intervalo. En la práctica, contamos el número de signos negativos de cada columna y, si es par, $f(x)$ es positiva y si es impar, $f(x)$ es negativa. Con esto completamos la tabla:

$$-\infty \qquad -2 \qquad +1 \qquad +2 \qquad +3 \qquad +\infty$$

$(x+2)$	–	+	+	+	+
$(x-1)$	–	–	+	+	+
$(x-2)$	–	–	–	+	+
$(x-3)$	–	–	–	–	+
$f(x)$	+	–	+	–	+

A TENER EN CUENTA:

- Si varios factores son iguales, se pueden agrupar en potencias y añadir una única fila a la tabla ya que, si la potencia es par, el signo siempre será positivo y, si es impar, el signo será el mismo que el de la base.

  Por ejemplo, si tenemos el factor $(x-2)$ dos veces, podemos añadir una fila para $(x-2)^2$, cuyo signo será positivo en todos los intervalos:

$(x-2)^2$	+	+	+	+	+

- Si el factor es un número real, el signo en todos los intervalos es el mismo.

  Por ejemplo, si un factor es -2, su signo será siempre negativo:

-2	$-$	$-$	$-$	$-$	$-$

- Si un factor no se puede descomponer en factores más simples es porque siempre tiene el mismo signo. Basta con saber el signo en un punto cualquiera (por ejemplo, en $x=0$) y ese será el signo en todos los intervalos.

  Por ejemplo, si tenemos el factor x^2+2, no podemos descomponerlo más porque no se anula nunca. Como el signo cuando $x=0$ es positivo, el factor siempre es positivo:

x^2+2	$+$	$+$	$+$	$+$	$+$

Ejemplo: Realizar la tabla de signos de la función $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{6-2x^2}$

La ecuación $x^2-2x+3=0$ no tiene solución real, así que el polinomio del numerador no se puede descomponer en factores más simples. En el denominador, sacando el factor común -2, queda $-2\left(x^2-3\right)$, de modo que la descomposición en factores de $f(x)$ es: $f(x)=\dfrac{x^2-2x+3}{-2\left(x-\sqrt{3}\right)\left(x+\sqrt{3}\right)}$

Los puntos que anulan los factores solo son $\sqrt{3}$ y $-\sqrt{3}$, ya que (-2) y $\left(x^2-2x+3\right)$ no se anulan nunca. Por otra parte, el factor $\left(x^2-2x+3\right)$ siempre es positivo, ya que cuando $x=0$ es positivo, de modo que la tabla es la siguiente:

	$-\infty$ a $-\sqrt{3}$	$-\sqrt{3}$ a $+\sqrt{3}$	$+\sqrt{3}$ a $+\infty$
$\left(x^2-2x+3\right)$	$+$	$+$	$+$
-2	$-$	$-$	$-$
$\left(x-\sqrt{3}\right)$	$-$	$-$	$+$
$\left(x+\sqrt{3}\right)$	$-$	$+$	$+$
$f(x)$	$-$	$+$	$-$

Por lo tanto, el signo de $f(x)$ es positivo en el intervalo $\left(-\sqrt{3},+\sqrt{3}\right)$ y negativo en $\left(-\infty,-\sqrt{3}\right)\cup\left(+\sqrt{3},+\infty\right)$.