6.4 MONOTONÍA Y CURVATURA

Hallando la derivada de una función podemos determinar los intervalos en los que la función crece y los intervalos en los que decrece, así como el tipo de curvatura que presenta, tanto si es cóncava como si es convexa. Por supuesto, también sabremos si la función es constante (no crece ni decrece) o si no tiene curvatura (es recta).

6.4.1 Monotonía. Funciones crecientes y decrecientes

Como sabemos, la derivada de una función en un punto es la pendiente de la recta tangente a la función en ese punto. Es fácil comprobar entonces que, si una función es creciente, la pendiente de la recta tangente es positiva, mientras que si la función es decreciente, esa pendiente será negativa. Ocurre lo mismo en sentido contrario, es decir, si la pendiente de la recta tangente (la derivada) es positiva, la función es creciente y, si es negativa, la función es decreciente.

$f'(x) > 0 \Leftrightarrow f(x)$ *creciente* $\qquad$ $f'(x) < 0 \Leftrightarrow f(x)$ *decreciente*

Para saber en qué puntos una función es creciente y en cuáles es decreciente, bastará entonces con una tabla de signos de la función derivada de $f(x)$.

Ejemplo: Estudia la monotonía de la función $f(x) = \dfrac{x^2 + 2x + 1}{3 - 2x}$

En primer lugar, hallamos la función derivada:

$$f'(x) = \frac{(2x+2)(3-2x) - \left(x^2 + 2x + 1\right)(-2)}{(3-2x)^2} = \frac{6x - 4x^2 + 6 - 4x + 2x^2 + 4x + 2}{(3-2x)^2} =$$

$$= \frac{-2x^2 + 6x + 8}{(3-2x)^2}$$

Después la descomponemos en factores:

$$f'(x) = \frac{-2x^2 + 6x + 8}{(3-2x)^2} = \frac{-2\left(x^2 - 3x - 4\right)}{(3-2x)^2} = \frac{-2(x-4)(x+1)}{(3-2x)^2}$$

Por último, realizamos la tabla:

	$-\infty$ a -1	-1 a $3/2$	$3/2$ a 4	4 a $+\infty$
(-2)	$-$	$-$	$-$	$-$
$(x-4)$	$-$	$-$	$-$	$+$
$(x+1)$	$-$	$+$	$+$	$+$
$(3-2x)^2$	$+$	$+$	$+$	$+$
$f'(x)$	$-$	$+$	$+$	$-$

Por lo tanto, $f(x)$ es creciente en el intervalo $\left(-1, 3/2\right)\cup\left(3/2, 4\right)$ y decreciente en el intervalo $\left(-\infty,-1\right)\cup\left(4,\infty\right)$.

6.4.2 Curvatura. Funciones cóncavas y convexas

Si una función es creciente (o decreciente) puede serlo de varias formas:

Es importante entonces, además de la monotonía, saber el tipo de curvatura que presenta, que puede ser de dos tipos:

CÓNCAVA hacia abajo
(Convexa hacia arriba)

CONVEXA hacia abajo
(*Cóncava hacia arriba*)

Esta información la obtenemos haciendo una tabla de signos de la segunda derivada, ya que la segunda derivada nos dice el ritmo de crecimiento (o decrecimiento) de una función:

- $f''(x)>0 \Leftrightarrow f(x)$ convexa hacia abajo
- $f''(x)<0 \Leftrightarrow f(x)$ cóncava hacia abajo

Ejemplo: Estudiar la curvatura de $f(x)=x^4+3x^3-5x$

Hallamos la segunda derivada y la decomponemos:

$f'(x)=4x^3+9x^2-5$

$f''(x)=12x^2+18x=6x\left(2x+3\right)$

Por último, completamos la tabla de signos:

	$-\infty$ a $-3/2$	$-3/2$ a 0	0 a ∞
6	$+$	$+$	$+$
x	$-$	$-$	$+$
$(2x+3)$	$-$	$+$	$+$
$f''(x)$	$+$	$-$	$+$

Es decir, en el intervalo $\left(-\infty,-3/2\right)\cup\left(0,\infty\right)$ la función es convexa hacia abajo (la segunda derivada es positiva) y en el intervalo $\left(-3/2,0\right)$ es cóncava hacia abajo.