6.5 CÁLCULO DE LÍMITES. REGLA DE L'HÔPITAL

El cálculo de la derivada puede servirnos también para calcular límites en el caso de ciertas indeterminaciones como $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ y $0\cdot\infty$, utilizando la Regla de L'Hôpital, que dice que:

Si $f(x)$ y $g(x)$ son funciones derivables en un entorno de a, entonces

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

¡CUIDADO! No es la derivada de un cociente, es la derivada de $f(x)$ y de $g(x)$ por separado.

Por ejemplo, al calcular $\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^2-x+1}{2x^3+x-3}$ obtenemos $\frac{0}{0}$. Vamos a resolver la indeterminación de las dos formas: con la Regla de L'Hôpital y extrayendo el factor $(x-1)$.

- Con la Regla de L'Hôpital

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^2-x+1}{2x^3+x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{4x^3-2x-1}{6x^2+1}=\frac{1}{7}$$

- Extrayendo el factor

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^4-x^2-x+1}{2x^3+x-3}=\lim_{x\to 1}\frac{\cancel{(x-1)}\left(x^3+x^2-1\right)}{\cancel{(x-1)}\left(2x^2+2x+3\right)}=\frac{1}{7}$$

La Regla de L'Hôpital nos sirve para resolver estas indeterminaciones en casos en los que no podemos resolverlas con los métodos conocidos. Por ejemplo, al calcular $\lim_{x\to 0}\frac{senx}{1-e^x}$ obtenemos $\frac{0}{0}$, pero no podemos extraer el factor x por no ser funciones polinómicas. En cambio, sí podemos usar la regla de L'Hôpital, ya que las dos funciones son derivables. Así:

$$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{1-e^x}=\frac{0}{0}=\lim_{x\to 0}\frac{cosx}{-e^x}=\frac{1}{-1}=-1$$

En el caso de indeterminaciones del tipo $0\cdot\infty$, debemos transformarlas en $\frac{\infty}{\infty}$ o en $\frac{0}{0}$ para poder aplicar la regla. Para ello: $0\cdot\infty=0\cdot\frac{1}{1/\infty}=0\cdot\frac{1}{0}=\frac{0}{0}$, o bien: $0\cdot\infty=\frac{1}{1/0}\cdot\infty=\frac{1}{\infty}\cdot\infty=\frac{\infty}{\infty}$.

Por ejemplo, $\lim_{x\to 0^+}\left(xLnx\right)=0\cdot(-\infty)=\lim_{x\to 0^+}\frac{Lnx}{1/x}=\frac{-\infty}{\infty}=\lim_{x\to 0^+}\frac{1/x}{-1/x^2}=\lim_{x\to 0^+}(-x)=0$