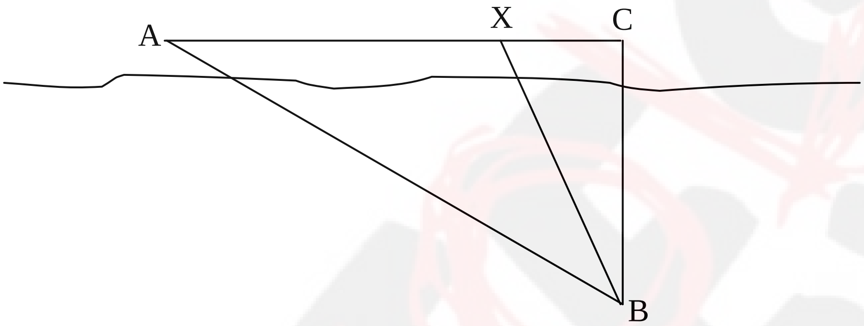
6.6 OPTIMIZACIÓN DE FUNCIONES

La optimización de funciones sirve para hallar la solución óptima, máximo o mínimo, en determinados problemas (costes mínimos, área máxima, tiempo mínimo...). Se tratará, por tanto, del cálculo de una derivada, que es la herramienta para hallar máximos y mínimos.

Por ejemplo, si estamos en el punto A de una playa y queremos llegar a un punto B del mar, podemos seguir distintos caminos:



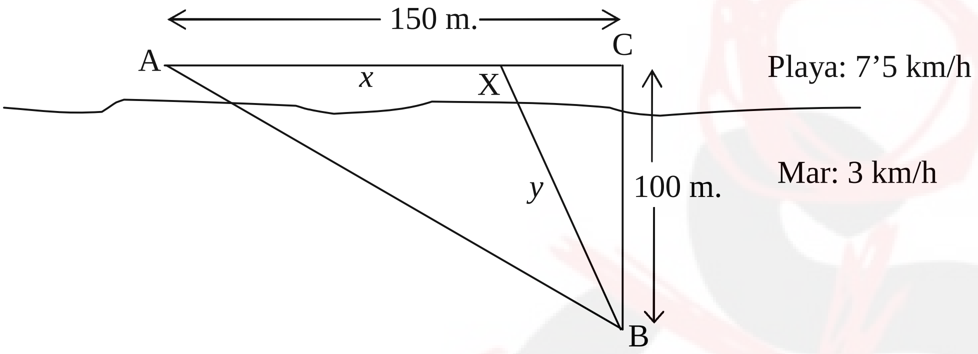
Si queremos que la distancia sea mínima, iremos directamente de A a B en línea recta. Si queremos nadar lo menos posible, iremos por la playa hasta el punto C y desde ahí nadaremos en línea recta hasta B.
Esas soluciones son más o menos evidentes pero, ¿qué pasa si queremos llegar en el menor tiempo posible? Corriendo por la playa vamos a más velocidad que nadando, así que, si vamos en línea recta de A a B, la distancia es más corta, pero vamos más despacio y tardamos más. Si corremos todo lo posible por la playa hasta el punto C, vamos más rápido, pero recorremos más distancia, y también tardaremos más. Para que el tiempo sea mínimo, la solución óptima es avanzar por la playa hasta un punto X y, desde ahí, ir a nado. Ese punto X es el que tendremos que averiguar.

Para resolver un problema de optimización, seguiremos los siguientes pasos:

- Buscar la función *f* que queremos optimizar.
- Si la función *f* depende de más de una variable, buscar relaciones entre ellas para que solo dependa de una.
- Hallar los puntos críticos de *f*.
- Determinar la solución óptima que nos pidan (máximo o mínimo). Para ello podemos hacer una tabla de signos de *f'* o la segunda derivada.

Vamos a resolver el problema anterior:

Hallar el camino óptimo a seguir desde A hasta un punto B situado a 100 metros de la playa si la velocidad que alcanzamos corriendo por la playa es de 7’5 km/h, la velocidad a nado es de 3 km/h y la distancia a la que nos encontramos del punto C son 150 metros.



Vamos a suponer que avanzamos *x* metros por la playa e *y* metros por el mar. Pasamos las velocidades a m/min ya que las distancias están en metros y así obtenemos el tiempo en minutos: 7’5 km/h son 125 m/min y 3 km/h son 50 m/min.

- La función que queremos optimizar es el tiempo total, que es:

$$t(x,y)=\frac{x}{125}+\frac{y}{50} \qquad (t \text{ medido en minutos. } x \text{ e } y \text{ en metros})$$

- Como depende de dos variables, tenemos que buscar una relación entre ellas. La obtenemos del Teorema de Pitágoras en el triángulo BXC: $100^2+(150-x)^2=y^2$

  Vemos que es mucho más sencillo si llamamos x a la distancia XC y $(150-x)$ a AX. De este modo: $t(x,y)=\frac{150-x}{125}+\frac{y}{50}$ y el Teorema de Pitágoras: $100^2+x^2=y^2$.

  Despejamos el valor de *y* y lo sustituimos en *t* para que nos quede solo en función de *x*.

$$y=\sqrt{x^2+10000}\longrightarrow t(x)=\frac{150-x}{125}+\frac{\sqrt{x^2+10000}}{50}$$

- Derivamos: $t'(x)=\frac{-1}{125}+\frac{2x}{100\sqrt{x^2+10000}}=\frac{-1}{125}+\frac{x}{50\sqrt{x^2+10000}}=\frac{-2\sqrt{x^2+10000}+5x}{250\sqrt{x^2+10000}}$

  Igualamos a cero y resolvemos la ecuación:

$$\frac{-2\sqrt{x^2+10000}+5x}{250\sqrt{x^2+10000}}=0\longrightarrow 5x-2\sqrt{x^2+10000}=0$$

$$5x = 2\sqrt{x^2+10000} \xrightarrow{\text{elevamos al cuadrado}} 25x^2 = 4\left(x^2+10000\right)$$

$$25x^2 = 4x^2 + 40000 \longrightarrow 21x^2 = 40000 \longrightarrow x = \sqrt{\frac{40000}{21}} = \frac{200}{\sqrt{21}} \approx 43'6$$

Por lo tanto, la solución óptima es correr por la playa 106’4 metros (150 – 43’6) y después nadar hasta B. El tiempo que tardaremos es:

$$t(43'6) = \frac{106'4}{125} + \frac{\sqrt{43'6^2+10000}}{50} \approx 3 \text{ minutos}$$

Podemos comprobar que, si hubiéramos ido en línea recta de A a B, la distancia sería $\sqrt{100^2+150^2} \approx 180$ m. y el tiempo que se tarda a nado: $t = \frac{180}{50} = 3'6$ minutos.

Si hubiéramos recorrido el camino ACB, en los 150 metros de la playa tardaríamos $\frac{150}{125} = 1'2$ minutos y, en los 100 metros a nado, $\frac{100}{50} = 2$ minutos. En total, 3’2 minutos.

Vemos que en ambos casos tardaríamos más que en la solución hallada, que es la óptima.